CAPÍTULO 9

**ANÁLISE DE REGIME PERMANENTE SENOIDAL**

9.1 REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Uma revisão breve de números complexos se faz necessária neste capítulo para a utilização das funções senoidais de forma mais simples, através do conceito de *fasor* e para o entendimento do conceito de *impedância* e *admitância*.

Não existe nenhum número real que satisfaça a equação:

*x2 + 1 = 0* ou *x2 = –1*.

Então, se atribui à solução desta equação um número imaginário ***j****1*, onde ***j*** é denominada *unidade imaginária* tal que:

ou

Um *número imaginário*, portanto, é o produto de um número real com a unidade imaginária ***j***. Assim, por exemplo, pode-se escrever a raiz quadrada de menos nove assim:

Um *número complexo* é a soma de um número real com um número imaginário. Genericamente se escreve:

***c*** *= a +* ***j****b*.

Onde *a* e *b* são números reais: sendo *a*, a *parte real* do número complexo ***c*** e *b* a *parte imaginária* do número complexo ***c***. Simbolicamente escreve-se:

*a = Re*{***c***}e *b = Im*{***c***}.

OBSERVAÇÃO: Neste texto será utilizada a letra em **negrito** para se representar uma **quantidade complexa**.

REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Trabalha-se com três formas básicas de números complexos, vistas a seguir

**FORMA RETANGULAR**

***c*** *= a +* ***j****b*, onde: *a = Re{****c****}, b = Im{****c****}* e

**FORMA EXPONENCIAL**

***c*** *= |****c****|e****j***, onde *|****c****|* é o módulo ou magnitude de ***c*** e é o argumento ou fase de ***c***.

A figura 9-1 dá uma interpretação geométrica para o número ***c*.**

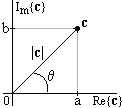
**FORMA POLAR**

É uma abreviação da forma exponencial, onde se escreve:

***c*** *= |****c****|∠*

**CONVERSÃO DE UMA FORMA PARA OUTRA**

Tomando-se como referência o gráfico da figura 9-1, onde a fase é sempre contada a partir do semieixo positivo real (positiva no sentido anti-horário e negativo no sentido horário) têm-se as seguintes fórmulas para conversão da forma retangular para a forma exponencial ou vice-versa:



**Fig. 9-1: Representação geométrica de um número complexo.**

e , se *a > 0* ou se *a < 0*.

*a = |****c****|cos()* e *b = |****c****|sen()*

Exemplo 1: Converta o número complexo ***c*** *= 4 –* ***j****3* para a forma exponencial ou polar.

Solução: e

A forma exponencial é, portanto:

***c*** *= 5e–****j****36,90º* e a forma polar é: ***c*** *=* 5∠36,90º

Observe que se ***c*** *= –4 +* ***j****3*, então *θ = tg–1(3/–4) + 180º = –36,9º + 180º*

Logo, *θ = –216,90º* ou *θ = 143,10º*

Exercícios:

1) Converter os números complexos abaixo para a forma exponencial.

a) *–1* b) *1 –* ***j****3* c) *–1 +* ***j****3* d) *–* ***j*** e) *5****j*** f) *–3 –* ***j****4* g) ***j*** *+ 1* h) ***j***

2) Converter os números complexos abaixo para a forma retangular.

a) *5e****j****30* b) *10e****–j****45* c) *2e****j****180* d) *2e****–j****180* e) *3e****j****0* f) *e****–j****90* g) 2 /90o h) 5 /60o

**OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS**

Seja ***c1*** *= a1 +* ***j****b1* ou***c1*** *= |****c****1|e****j****1* e***c2*** *= a2 +* ***j****b2* ou***c2*** *= |****c****2|e****j****2*

Então, as seguintes operações podem ser realizadas com estes números:

- Adição: ***c1*** *+* ***c2*** *= (a1 + a2) +* ***j****(b1 + b2)*

- Subtração: ***c1*** *+ (–* ***c2****) = (a1 – a2) +* ***j****(b1 – b2)*

Observe que a adição e a subtração não são possíveis na forma exponencial.

- Multiplicação: ***c1c2*** *= (a1a2 – b1b2) +* ***j****(a1b2 + a2b1)*

ou na forma exponencial: ***c1c2*** *= |****c1****||****c2****|e****j****(1 + 2)*

OBSERVAÇÃO: multiplicar um número complexo por *–1* equivale a somar ou subtrair *180o* em sua fase.

- Divisão:

**NÚMERO COMPLEXO CONJUGADO**

Se ***c*** *= a +* ***j****b* então, o *complexo conjugado* de ***c*** será o número complexo dado por:

***c\**** *= a –* ***j****b*

ou, na forma exponencial, se ***c*** *= |****c****|e****j*** então ***c\**** *= |****c****|e****–j***

Exercício: Sendo ***c*** um número complexo, mostre que as seguintes relações são válidas:

***c*** *+* ***c\**** *= 2Re*{***c***}ou *Re*{***c***} *= (1/2)(****c*** *+* ***c\*****)*

***c*** *–* ***c\**** *=* ***j****2Im*{***c***}ou *Im*{***c***} *= (1/****j****2)(****c*** *–* ***c\*****)*

***cc\**** *= |****c****|2*

***c****k = |****c****|ke****j****kθ*

**LEMAS**

- Lema 1: *Re*{***c1*** *+* ***c2*** *+ ... +* ***cn***} *= Re*{***c1***} *+ Re*{***c2***} *+ ... + Re*{***cn***}

*Re*{*k****c***} *= kRe*{***c***}.

- Lema 2:

- Lema 3: Se *Re*{***c1****e****j****t*} *= Re*{***c2****e****j****t*} então ***c1*** *=* ***c2***. A recíproca é verdadeira.

OBSERVAÇÃO: Dois números complexos ***c1*** e ***c2*** são iguais se, e só se, uma das seguintes condições for satisfeita:

1. *Re*{***c1***} *= Re*{***c2***}e *Im*{***c1***} *= Im*{***c2***}

2. |***c1***| = |***c2***| e /***c1*** = /***c2***.

9.2 SENOIDE E FASOR

**SENOIDE**

As tensões alternadas senoidais podem vir de diversas fontes. A mais comum é aquela que obtemos nas tomadas residenciais, cuja origem vem de uma usina geradora; estas usinas em geral são alimentadas por quedas d’água, óleo, gás ou fissão nuclear; ou ainda pelo vento, no caso da energia eólica, ou pelo sol no caso da energia solar. Em cada caso, um *gerador CA* (também denominado de *alternador*), é o componente mais importante no processo de *conversão de energia*. No caso específico da energia solar, os painéis solares geram uma tensão contínua e um dispositivo denominado de *inversor*, faz a conversão para tensão alternada senoidal.

A forma de onda de uma senoide é como mostrada na figura 9-2, de onde se podem tirar as seguintes definições:

- *Valor instantâneo*: é a amplitude da senoide em um instante de tempo qualquer, indicado por uma letra minúscula como, por exemplo, *v1(t)*, *v2(t),* etc.

- *Amplitude de pico*: é o valor máximo da senoide em relação ao valor médio, indicado por letra maiúscula, como *Vp*.

- *Valor de pico*: é o valor máximo da senoide em relação ao nível zero. No caso da figura 9-2, esse valor é igual à amplitude de pico, pois a valor médio da senoide é nulo.

- *Valor pico a pico*: é a diferença entre os valores dos picos positivo e negativo, isto é, a soma dos módulos das amplitudes positiva e negativa. É indicada por *Vpp*.

- *Período*: Intervalo de tempo entre repetições sucessivas da forma de onda. Ele sempre contém um único ciclo da forma de onda. Indicado por *T*.

- *Freqüência*: é o número de ciclos que ocorrem em *1* (um) segundo. Indicada por *f*, ela é o inverso do período, isto é, *f = 1/T*. A unidade de freqüência é o *Hertz* (Hz). *1 Hz =* 1 ciclo por segundo (*c/s*).

- *Frequência angular*: indicada por *ω*, é dada por *ω = 2πf* = 2π/T. Sua unidade é o radiano por segundo (*rd/s*). Esta frequência também pode ser vista como a velocidade de um vetor girando em torno do centro de uma circunferência de raio unitário. Assim, pode-se também escrever:

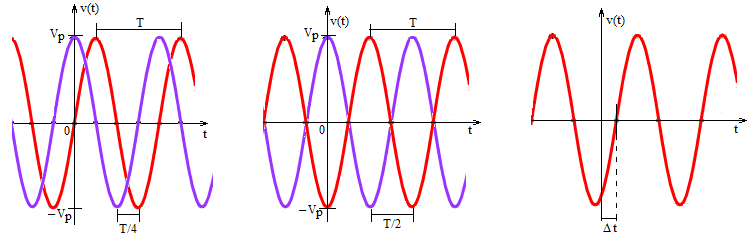
*ω = (ângulo percorrido em radianos)/(tempo em segundos)*

Isto é: *ω =* ou *α = ωt*

Deve-se lembrar que *1 radiano (1 rd)* é o ângulo correspondente ao comprimento do arco igual ao raio da circunferência, donde se tira que:

*1 rd ≡ 57,296º ≈ 57,3º*.

- *Fase ou defasagem*: é um *deslocamento no tempo* de uma senoide em relação ao instante *t = 0* ou em relação à outra senoide que é tomada como referência. Este deslocamento no tempo pode ser relacionado a um ângulo em graus ou radiano utilizando uma simples regra de três, onde o período *T* corresponde a *2π rd* ou *360º*. Na figura 9-2(c), este deslocamento é indicado por *Δt* (ou se for em ângulo, por *Δθ*). Na figura 9-2(a) a defasagem entre as duas senoides é de *T/4*, correspondendo a um ângulo de *90º*. Na figura 9-2(b) a defasagem é de *T/2*, correspondendo a um ângulo de *180º*, o que equivale a multiplicar a senoide por *–1*.



(a) (b) (c)

**Fig. 9-2: Formas de onda de senoides.**

**EXPRESSÃO GERAL PARA TENSÕES E CORRENTES SENOIDAIS**

A expressão matemática de uma senoide é:

*g(t) = Apsenα* ou *g(t) = Apcosα*

Quando a fase da senoide é nula, então *α = ωt*, logo:

*g(t) = Apsen(ωt)* ou *g(t) = Apcos(ωt)*

Exercícios

1) Determine os ângulos, apenas no 1º semiciclo, para o qual o valor instantâneo da tensão *v = 10sen377t* é *4V*. Determine os instantes em que a função assume esse valor.

**Resposta:** *α = 23, 578º ou 156,422º e t = 1,09 ms ou 7,24 ms*.

2) Esboce o gráfico da corrente elétrica *i = 10 sen314t*, sendo a abscissa: (a) o ângulo em graus; (b) o ângulo em radianos; (c) o tempo em *ms*.

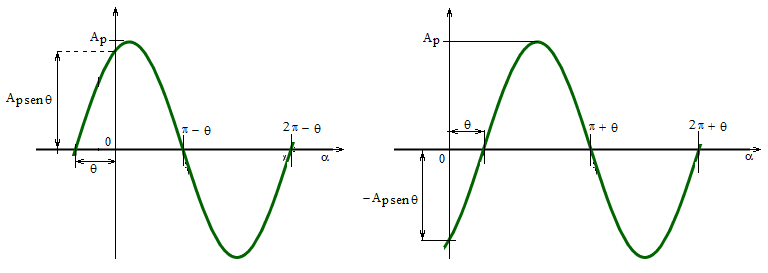
**RELAÇÕES DE FASE**

As expressões matemáticas das senoides vistas anteriormente pressupõem uma fase nula tanto para a função seno como para a função cosseno, em relação ao instante zero. Entretanto, nem sempre se verifica isto na prática; ao se ligar um circuito, não se sabe exatamente onde uma senoide vai começar. Neste caso pode-se ter a situação mostrada na figura 9-3. Portanto, uma expressão mais geral para a senoide pode ser escrita como segue:

*g(t) = Apsen(ωt ± θ)* ou *g(t) = Apcos(ωt ± θ)*

Onde, em relação à fase nula, o sinal negativo indica um deslocamento para a direita (atraso) e o sinal positivo indica um deslocamento para a esquerda (adiantamento). Ou, dito de outra maneira, para a função seno, se sua curvatura intersecta o eixo horizontal à esquerda da origem com inclinação positiva (função crescente), usa-se o sinal positivo, caso contrário, usa-se o sinal negativo. Para a função cosseno, dá-se o contrário. A figura 9-3 ilustra essas situações. Note-se que, sempre se pode transformar uma função seno numa função cosseno e vice-versa, utilizando as igualdades:

cos *ωt = sen(ωt + 90º) e senωt* = cos(*ωt – 90º)*



(a) (b)

**Fig. 9-3: (a) Apse*n(ωt + θ); (b) Apsen(ωt – θ)***

Pode-se também determinar a defasagem entre duas senoides quaisquer, calculando a fase de cada uma delas e depois, tomando o módulo da diferença entre elas. É importante que as duas senoides estejam expressas pela mesma função senoidal (ou todas seno ou todas cosseno).

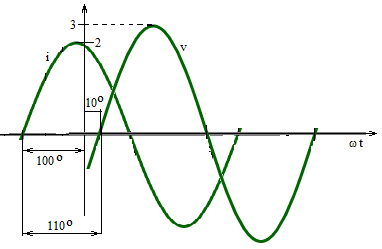
Exemplo 2: Qual é a relação de fase entre o par de senoides dado abaixo:

*i = 2cos(ωt + 10º)* e *v = 3sen (ωt – 10º)*

Pode-se visualizar a solução deste exemplo na figura 9-4. Note-se que primeiro se transformou a função cosseno numa função seno, ou seja:

*i = 2cos(ωt + 10º) = 2sen(ωt + 10º + 90o) = 2sen(ωt + 100º).*





**Fig. 9-4: relação de fase entre as duas senoides**

Esta figura mostra que a corrente *i* está adiantada em relação à tensão de *110º*, ou que *v* está atrasada em relação a *i* de *110º*. A relação de fase entre estas duas senoides é, portanto *110º*.

Exercício: Qual é a relação de fase entre os seguintes pares de senoides:

a) *v = 10sen(ωt + 30º) e i = 5sen(ωt + 70º)*

b*) i =* *15sen(ωt + 60º) e v = 10sen(ωt – 20º)*

c) *i =* –*sen(ωt + 30º) e v = 2sen(ωt + 10º)*

d) *i =* –2cos*(ωt – 30º) e v = 3sen(ωt – 150º)*

**Resposta:** *a) 40º, b) 80º, c) 200º ou 160º, d) 30º.*

**EXPRESSÃO DE UMA FUNÇÃO SENOIDAL A PARTIR DO SEU GRÁFICO**

Os procedimentos listados a seguir é muito útil quando se quer obter a expressão de uma senoide vista, por exemplo, no osciloscópio. Para a função ser expressa *em termos de um cosseno*, segue-se os seguintes passos:

1. Meça a amplitude de pico, *A*, em volts. Para maior precisão, é aconselhável medir a amplitude pico a pico, *2A*.
2. Meça o período T em segundos e calcule *ω* em *rd/s*.
3. Meça a amplitude, *v1*, da senoide em um instante escolhido, *t1*, na subida ou na descida da curva.
4. Calcule a fase (em radianos) como sendo:

, se *v(t)* está aumentando no instante *t1*.

Ou

, se *v(t)* está diminuindo no instante *t1*.

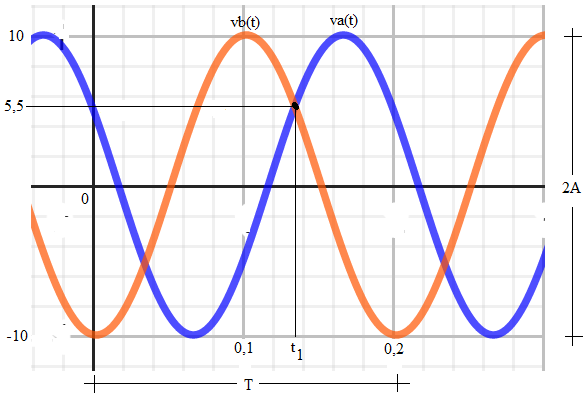
Por exemplo, a figura 9-5, mostram duas senoides obtidas num osciloscópio onde, no instante *t1 = 0,135 s,* suas amplitudes são: *va(t1) = vb(t1) = 5,50 V*. A amplitude de pico das duas é *A = 10 V* e o período é *T = 0,2 s*. Assim, no instante *t1*, a senoide *va(t)* está aumentando e a senoide *vb(t)* está diminuindo, portanto, as fases de cada uma são:

ou 60º

ou 174º

Logo, as tensões podem ser expressas como:

e



**Fig. 9-5: Senoides exibidas no osciloscópio.**

**FASOR**

O conceito de fasor dado a seguir, permite tratar operações com senoides como operações algébricas de números complexos, valendo-se do seguinte teorema.



Teorema fundamental: a soma algébrica de senoides de mesma frequência, , é também uma senoide de mesma frequência .



Então, se cada senoide for representada por um número complexo cujo módulo é a amplitude máxima da senoide e cujo argumento é a fase da senoide, esquecendo o fator tempo, pode-se somar estas senoides fazendo uma simples soma de números complexos.

O número complexo representando a senoide chama-se *fasor*. Assim, se a senoide for:

*v(t) = Vpcos(t + )*

Então o fasor representante desta senoide será o número complexo:

***V*** *= Vpe****j***

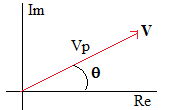
A recuperação da senoide a partir do fasor ***V***, conhecendo-se , dá-se como segue:

*v(t) = Re*{***V****e****j****t*} para se obter a função em forma de cosseno ou

*v(t) = Im*{***V****e****j****t*} para se obter a função em forma de seno

A expressão ***V****e****j****t* costuma ser chamada de *fasor girante*.

Uma representação gráfica de um fasor pode ser como a mostrada na figura 9-6.



**Fig. 9-6: exemplo de um fasor tensão**

Exercício: utilizando um diagrama fasorial, determine a defasagem entre a tensão e a corrente dadas por:

*v(t) = 5sen(4t – 20o)* e *i(t) = –7cos(4t – 60o)*

Exemplo 3: Encontrar uma senoide simples correspondente à soma das senoides abaixo:

*v(t) = 5sen(4t – 20o) + 6sen(4t + 45o) – 7cos(4t – 60o) + 8cos(4t + 30o)*

Solução: como todas as senoides têm a mesma frequência,  *= 4 rd/s*, então, convertendo-se todas elas para a *função seno* tem-se:

*v(t) = 5sen(4t – 20o) + 6sen(4t + 45o) – 7sen(4t +30o) + 8sen(4t + 120o)*

Representando-se cada uma das senoides pelo seu respectivo fasor, tem-se:

***V*** *= 5e****–j****20 + 6e****j****45 – 7e****j****30 + 8e****j****120*

Para somá-las precisa-se convertê-las para a forma retangular, assim:

***V*** *= (4,69 –* ***j****1,71) + (4,24 +* ***j****4,24) – (6,06 +* ***j****3,5) + (– 4 +* ***j****6,93)*

***V*** *= –1,13 +* ***j****5,96* ou, na forma exponencial: ***V*** *= 6,07e****j(–79,26 + 180) =*** *6,07∠100,74º*

Portanto, no domínio do tempo, como a frequência é conhecida tem-se a senoide resultante:

*v(t) = 6,07sen(4t + 100,73o) ou v(t) = – 6,07sen(4t – 79,27o)*.

9.3 SOLUÇÃO PARTICULAR DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL USANDO FASORES

A equação diferencial para um circuito linear e invariante no tempo, de ordem *n*, em regime permanente senoidal, tem a forma geral:

+ (9-1)

Onde *x(t)* é a solução particular denominada de resposta de regime permanente senoidal e *y(t) = Ypcos(t + φ)* é a excitação senoidal. Pelo teorema fundamental, a solução particular *x(t)* deve ser senoidal, com a mesma frequência da excitação, ou seja:

*x(t) = Xpcos(t + )* (9-2)

Fazendo, portanto, *x(t) = Re*{***X****e****j****t*}e *y(t) = Re*{***Y****e****j****t*} e substituindo na equação (9-1), e aplicando-se os lemas 1, 2 e 3 convenientemente, obtém-se:

*ao(****j****)n****X*** *+ a1(****j****)n–1****X*** *+ ... + an–1(****j****)****X*** *+ an****X*** *=* ***Y*** (9-3)

O que equivale, na prática, a substituir o operador (*d/dt*) por (***j***) e as funções do tempo por fasores na equação (9-1) para se obter a equação (9-3).

Exemplo 4: Seja o circuito *RLC* série mostrado na figura 9-7 onde se quer encontrar a resposta de regime permanente senoidal para a corrente *i*. Dado: *vs = 100cos(100t) V*.

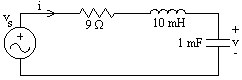


Fig. 9-7: Circuito RLC série

Solução: Aplicando-se a lei de Kirchhoff na malha, encontra-se a equação diferencial:

Na forma fasorial se tem:

*(****j****)2****I*** *+ 900(****j****)****I*** *+ 105****I*** *= – 106e****j****0,* onde *= 100 rd/s*

Donde se tira: ***I*** *= 7,86e****j****135*

Logo, no domínio do tempo, lembrando que  *= 100 rd/s* se tem:

*i(t) = 7,86sen(100t + 135o) = – 7,86sen(100t – 45o) A*.

9.4 RESPOSTA COMPLETA

Exemplo 5: Considere um circuito *RLC* série onde se quer encontrar a resposta completa como sendo a tensão no capacitor, supondo que: *R = 1,5 , C = 1 F, L = 0,5 H, iL(0) = 2 A* e *vC(0) = 1 V*. A excitação é senoidal dada por *vs(t) = u(t)cos(2t) V*.

Solução: A equação diferencial do circuito, para *t > 0*, fica:

Então, substituindo os valores de *R, L* e *C*, tem-se:

, t > 0

Deste resultado tira-se a equação característica:

*0,5s2 + 1,5s + 1 = 0*

Resolvendo esta equação obtêm-se as frequências naturais:

*s1 = – 1 rd/s e s2 = – 2 rd/s*

Como as frequências naturais são reais e distintas, então a resposta natural será dada por:

Para se encontrar a resposta de regime permanente senoidal, transforma-se a equação diferencial do circuito na equação fasorial:

*0,5(****j****)2****VF*** *+ 1,5(****j****)****VF*** *+* ***VF*** *=* ***Vs****,* onde *= 2 rd/s* e***Vs*** *= 1e****j****0*

Donde se tira: ou***VF*** *= 0,316e–* ***j****108,4*

Portanto, no domínio do tempo se tem:

*vF(t) = 0,316cos(2t – 108,4o)*

A resposta completa será a soma de *vN* com *vF*. Então se tem:

*v(t) = A1e–t + A2e –2t + 0,316cos(2t – 108,4o)*

As constantes *A1* e *A2* são encontradas usando-se as condições iniciais:

*v(0) = 1 V* e *= 2 V/s*, donde se tira:

*A1 = 3,6 V* e *A2 = – 2,5 V*

Finalmente tem-se:

*v(t) = 3,6e–t – 2,5e–2t + 0,316cos(2t –108,4o) V*.

ou *v(t) = 3,6e–t – 2,5e–2t – 0,316cos(2t + 71,6o) V*.

A figura 9-8 mostra um esboço de *v(t)*, onde se verifica que, até aproximadamente *4 s*, aparece um transitório cujo pico máximo é aproximadamente cinco vezes o valor de pico do regime permanente.

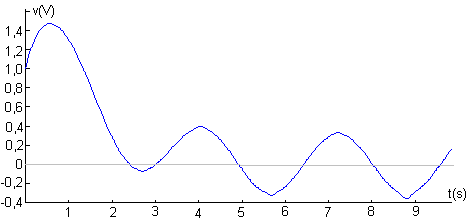


Fig. 9-8

**CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE**

Independente do estado inicial, e desde que as frequências naturais do circuito estejam no semiplano esquerdo aberto, o circuito terá um regime permanente senoidal e o circuito será dito estável.

Se pelo menos uma frequência natural estiver no semiplano direito aberto, o circuito não apresentará um regime permanente e será, portanto, instável.

Se as frequências naturais estiverem sobre o eixo imaginário, as seguintes situações devem ser consideradas, como exemplificado a seguir:

Exemplo 6: Frequências múltiplas. Seja um circuito com equação característica:

*s4 + 2o2s2 + o4 = 0* onde*: s1 = s2 =* ***j****o* e *s3 = s4 = –* ***j****o*

A resposta natural será:

*xN = (A1 + A2t)e****j****ot + (A3 + A4t)e****–j****ot*

Logo, quando o circuito apresenta frequências múltiplas, a resposta natural tende a infinito quando *t* tende a infinito, não tendo uma resposta de regime permanente.

Exemplo 7: Sem frequências múltiplas. Seja a seguinte equação característica:

*s2 + o2 = 0* onde *s1 =* ***j****o* e *s2 = –* ***j****o*

A resposta natural será:

*A1e****j****ot + A2e****–j****ot = Kcos(ot + )*

Neste caso, se a freqüência da excitação for *diferente de ωo*, o circuito terá um regime permanente senoidal com a mesma frequência da excitação. Caso contrário o circuito será instável.

OBSERVAÇÃO: O *princípio da superposição* pode ser aplicado a um circuito linear alimentado por várias fontes que tenham *frequências distintas*, para o cálculo da resposta de regime permanente. Esta resposta, obviamente, não será senoidal.

9.5 IMPEDÂNCIA E ADMITÂNCIA

O conceito de impedância e admitância permitem tratar os circuitos em regime permanente senoidal utilizando métodos semelhantes àqueles vistos para circuitos resistivos.

**RELAÇÃO FASORIAL ENTRE CORRENTE E TENSÃO**

Considere-se um circuito linear e invariante no tempo, em regime permanente senoidal, como mostra a figura 9-9.

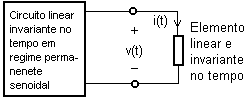


Fig. 9-9

Sendo ***V*** *= Vpe****j****v* e***I*** *= Ipe****j****i* os fasores que representam as senoides *v(t)* e *i(t)*, respectivamente, pode-se escrever:

*v(t) = Re*{***V****e****j****t*} (9-4)

*i(t) = Re*{***I****e****j****t*} (9-5)

Então se tem as seguintes equações fasoriais para o resistor, o capacitor e o indutor:

**RESISTOR**: Como *v(t) = Ri(t)*, então, usando as equações (9-4) e (9-5) e os lemas apropriados, encontra-se:

***V*** *= R****I****, |****V****| = R|****I****|, v = i*

Verifica-se, portanto que, no resistor, não há defasagem entre tensão e corrente e que a relação fasorial não depende da frequência.

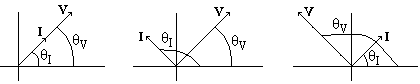
**CAPACITOR**: Como *i(t) =* , encontra-se:

***I*** *=* ***j****C****V****, |****I****| = C|****V****|, i = v + 90o*

**INDUTOR**: Como *v(t) =* , encontra-se:

***V*** *=* ***j****L****I****, |****V****| = L|****I****|, i = v – 90o*

Note-se que, tanto para o capacitor como para o indutor, a relação fasorial entre tensão e corrente depende da frequência da fonte. No capacitor diz-se que a corrente está adiantada em relação à tensão enquanto no indutor dá-se o contrário. Esta defasagem, como pode ser vista, é de *90o* ou de um quarto do período. A figura 9-10 mostra o diagrama fasorial para a corrente e tensão nos três elementos vistos.



1. (b) (c)

# Fig. 9-10: Diagrama fasorial: (a) Resistor; (b) Capacitor; (c) Indutor

**DEFINIÇÃO DE IMPEDÂNCIA E ADMITÂNCIA**

Considere, agora, o esquema mostrado na figura 9-11.

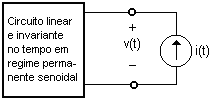


Fig.9-11

Onde: *i(t) = Ipcos(t + I)* e *v(t) = Vpcos(t + v)*

Então, por definição, a impedância de entrada do circuito de um acesso, ***Z***, dada em , é a razão entre o fasor tensão ***V*** e o fasor corrente ***I***, ou seja:

(9-6)

Então, da equação (9-6) pode-se escrever:

*v(t) = |****Z****|Ipcos(t + z + I)* (9-7)

A admitância, ***Y***, dada em *Siemens (S)*, é definida como o inverso da impedância, assim:

(9-8)

Consequentemente, desta equação encontra-se:

*i(t) = |****Y****|Vpcos(t + y + V)*

Com estas definições, pode-se tirar os seguintes resultados para as impedâncias e admitâncias do resistor, capacitor e indutor

Para o resistor: como ***V*** *= R****I*** 🡪 🡪

Para o capacitor: como 🡪 🡪 ou

Para o indutor: como 🡪 🡪 ou

**REATÂNCIA E SUSCEPTÂNCIA**

*Reatância* é a parte imaginária de uma impedância e a *susceptância* é a parte imaginária de uma admitância. Então, se ***Z*** *= R +* ***j****X* é uma impedância, tem-se que *X* é a reatância de ***Z*** e se ***Y*** *= G +* ***j****B* é uma admitância, tem-se que *B* é a susceptância de ***Y***. Portanto, pode-se concluir que:

- a *reatância e a susceptância de um capacitor são, respectivamente*: e

- a *reatância e a susceptância de um indutor* são, respectivamente: e

Note que a reatância de um capacitor é negativa e a do indutor é positiva. Para a susceptância, dá-se o contrário.

Note também que, a *unidade de impedância* é o Ohm (Ω) e a *unidade de admitância* é o Siemen (S).

9.6 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS E ANÁLISE DE NÓ E DE MALHA

A análise é semelhante àquela usada para circuitos resistivos, sendo que agora os elementos passivos são tratados como impedâncias ou admitâncias, enquanto as fontes são vistas como fasores. Portanto, valem as mesmas regras utilizadas para circuitos resistivos.

**IMPEDÂNCIAS EM SÉRIE**

O fasor corrente é comum a todas as impedâncias e as tensões de cada uma delas se somam fasorialmente. A impedância equivalente vista pela fonte será:

***Zeq = Z1 + Z2 + Z3 + ...***

**ADMITÂNCIAS EM PARALELO**

O fasor tensão é comum a todas as admitâncias e a corrente de cada uma delas se soma fasorialmente. A admitância equivalente vista pela fonte será:

***Yeq*** *=* ***Y1*** *+* ***Y2*** *+* ***Y3*** *+ ...*

Exercícios:

1) Um circuito *RLC* série tem resistência *R = 4 Ω*, reatância indutiva *XL = 8 Ω* e reatância capacitiva, *XC = 5 Ω*. Determine a impedância equivalente desse circuito. Repita a questão para o caso do circuito *RLC* paralelo.

**Resposta***:* ***Zeq*** *= 4 +* ***j****3 Ω (comportamento indutivo)e* ***Zeq*** *= 3,7 –* ***j****1,1 Ω (comportamento capacitivo)*

2) Seja considerar um circuito *RLC* série em estado estacionário senoidal, alimentado por uma fonte de tensão *vs(t) = 50cos(2πft + 30o)*. Encontre a impedância equivalente vista pela fonte bem como a corrente fornecida por ela quando: (a) *f = 60 Hz*; (b) *f = 400 Hz*. [Observe que o comportamento do circuito muda, quando a frequência muda de *60 Hz* para *400 Hz*]. Dado: *R = 25 Ω; L = 20 mH* e *C = 50 μF*.

**Resposta***: (a)* ***Z*** *= 25 –* ***j****45,51 Ω; i = 0,96cos(120πt + 91,19º) A; (b)* ***Z*** *= 25 +* ***j****42,31 Ω; i = 1,02/-29,25º A*

## **ANÁLISE DAS TENSÕES DE NÓ**

Exemplo 8: Seja o circuito da figura 9-12, onde a corrente da fonte é uma senoide dada por: *is(t) = 10cos(2t + 30o)* A e deseja-se determinar a tensão de regime permanente senoidal, *e2(t)*, no nó *2*.

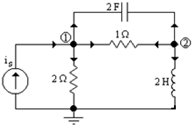


Fig. 9-12: circuito para a análise de nó.

Solução: transformando-se os elementos do circuito em admitâncias e a fonte em fasor, obtém-se o circuito equivalente da figura 9-13, onde se pode aplicar a lei de Kirchhoff para os nós, semelhante ao caso resistivo, com as admitâncias fazendo o papel das condutâncias.

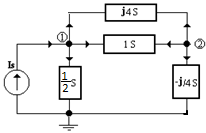


Fig. 9-13: circuito com admitâncias.

Obtém-se assim as equações dos nós 1 e 2. (Observe-se que: ***I = YV***)

Nó 1: ½ ***E1*** *+* ***j****4(****E1*** *–* ***E2****) + (1)(****E1*** *–* ***E2****) = Is*

Nó 2: ***E2*** *+ (****E2*** *–* ***E1****) +* ***j****4(****E2*** *–* ***E1****) = 0*

Arrumando-se estas equações na forma de um sistema nas incógnitas ***E1*** e ***E2***, e aplicando-se a regra de Cramer, obtém-se o fasor:

***E2*** *= 1,64 +* ***j****0,89 ou* ***E2*** *= 18,6e****j58,67*** V

Ou, no domínio do tempo:

*e2(t) = 18,6cos(2t + 58,67o) V*.

**ANÁLISE DAS CORRENTES DE MALHA**

Usando-se o mesmo circuito do exemplo anterior, juntando-se as admitâncias que estão em paralelo numa só e transformando-se todas as admitâncias em impedâncias, tem-se a situação mostrada na figura 9-14:

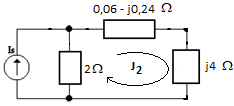


Fig. 9-14

Escrevendo-se a equação da malha direita, tem-se:

Malha direita: *2(****J2*** *–* ***Is****) + (0,06 –* ***j****0,24)****J2*** *+* ***j****4****J2*** *= 0.*

E, como ***Is*** *= 10/30º = 8,66 +* ***j****5*, então tira-se:

***J2*** *= 3,99 –* ***j****2,42 ou* ***J2*** *= 4,67/–31,24º A*

Portanto, ***E2*** *=* ***j****4(****J2****) = 4/90º (4,67/–31,24º) = 18,6e****j58,67*** V

Ou, *e2(t) = 18,6cos(2t + 58,67o) V*

9.7 CIRCUITOS RESSONANTES

Já foi visto que, um circuito *LC* sem perdas oscila numa freqüência natural . Se a frequência de uma fonte senoidal coincide com essa frequência natural, verifica-se um fenômeno interessante na resposta do circuito, com várias aplicações (e implicações), chamado de ressonância.

Tomando-se como base o circuito *RLC* paralelo mostrado na figura 9-15, seja deduzir sua admitância de entrada, vista pela fonte de corrente senoidal e estudar o fenômeno da ressonância.

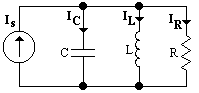


Fig. 9-15: Circuito RLC ressonante

Adicionando-se as três admitâncias em paralelo, tem-se:

(9-9)

onde:

*G = = Re*{***Y***} é constante

*B = C – = Im*{***Y***} é a *susceptância*

Quando a frequência da fonte coincide com a frequência de oscilação natural do circuito, verifica-se que a parte imaginária da admitância ou da impedância se torna nula, ou seja:

*C – = 0*

Donde se tira:

*=*

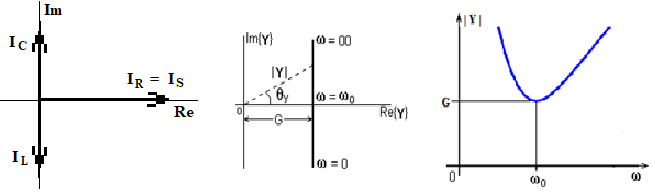
que é a freqüência de ressonância do circuito. Como a parte imaginária é nula, então na ressonância tem-se:

***Y*** *= G*

*Y = 0o*

***IR*** *=* ***Is, IC*** *+* ***IL*** *= 0* ou ***IC*** *= –****IL***

O *diagrama fasorial* destas correntes, o *lugar geométrico* das admitâncias em função da frequência e o *módulo da admitância* em função da frequência, são mostrados nas figuras 9-16(a), 9-16(b) e 9-16-(c), respectivamente.



1. (b) (c)

Fig. 9-16: (a) Diagrama fasorial das correntes; (b) Lugar geométrico das admitâncias e (c)

A impedância de entrada do mesmo circuito pode ser calculada tomando-se o inverso da admitância, assim:

ou seja,

*Re*{***Z***} *=* , depende da frequência

*Im*{***Z***} *= = X*, é a *reatância*

Portanto, a parte real e a parte imaginária da impedância (reatância) dependem frequência).

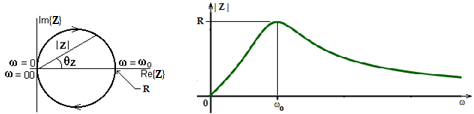
Observe-se que, *na ressonância*, tem-se:

*|XL| = |XC|*

*Z = 0o*

***Z*** *=*

O lugar geométrico das impedâncias, em função da frequência é agora um círculo que pode ser visto na figura 9-17(a). A variação do módulo da impedância em função da freqüência é visto na figura 9-17(b)



(a) (b)

Fig. 9-17: (a) Lugar geométrico das impedâncias; (b)

Observa-se que, na ressonância, o módulo da impedância é máximo e igual a *R*. Em frequências abaixo de *o*, a maior parte da corrente passa pelo indutor enquanto em frequências acima de *ωo* a maior parte da corrente passa pelo capacitor.

OBSERVAÇÃO: Os gráficos das figuras 9-16 e 9-17 valem também para o circuito *RLC série*, trocando-se admitância por impedância e condutância por resistência, só que, agora temos:

***Z*** *= R*

*Z = 0o*

***VR*** *=* ***Vs, VC*** *+* ***VL*** *= 0* ou ***VC*** *= –****VL***

Exercício: Mostre que, na ressonância, o circuito *LC* paralelo funciona como um circuito aberto e o circuito *LC* série comporta-se como um curto-circuito.

Exemplo 9: Considere um circuito *RLC* paralelo com *R = 1 , C = 1 F, L = 1/4 H* e *is(t) = cos(t) A*. Encontre as correntes nos diversos elementos, em regime permanente senoidal, e trace um diagrama fasorial para elas.

Solução: Como  *= 1 rd/s*, tem-se:

ou

ou

***V*** *=* ***Z.Is*** *= 0,32e****j****71,6.1e****j****0 = 0,32e****j****71,6*

***IR*** *=* ***Y­.V*** *= 1e****j****0.0,32e****j****71,6 = 0,32e****j****71,6*

***IL*** *=* ***YL.V*** *= 4e****–j****90. 0,32e****j****71,6 = 1,28e****–j****18,4*

***IC*** *=* ***YC.V*** *= 1e****j****90. 0,32e****j****71,6 = 0,32e****j****161,6*

O diagrama fasorial é mostrado na figura 9-18:

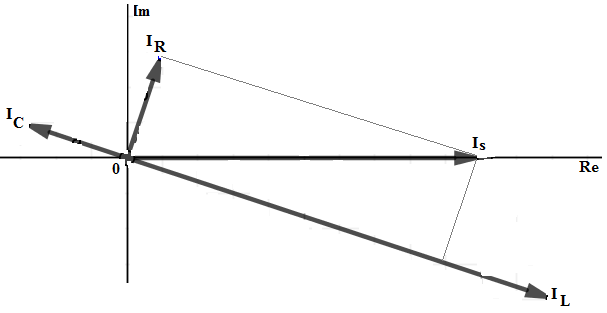


Fig. 9-18: Diagrama fasorial do exemplo 9.

Exercícios:

1) Refaça o exemplo anterior, considerando *is = cos(2t)*

**Resposta: *IR*** *= 1ej0,* ***IL*** *= 2e-j90,* ***IC*** *= 2ej90*

2): Refaça o exemplo anterior, supondo *is = cos(2t)* e *R = 250 .*

**Resposta: *IR*** *= 1ej0,* ***IL*** *= 500e–j90,* ***IC*** *= 500ej90*

OBSERVAÇÃO: Na ressonância, como pode ser visto nos exercícios anteriores, a corrente (ou tensão, se for num circuito série) no indutor e no capacitor são maiores que a corrente (ou tensão) da fonte. Seja cauteloso, portanto, ao fazer medidas de corrente e tensão, em circuitos ressonantes.

9.8 FATOR DE QUALIDADE OU FATOR DE MÉRITO

Para se ter uma ideia de quão próximo do circuito *LC* ideal está um circuito *RLC* real, define-se o fator de qualidade, *Q*, de um circuito, série ou paralelo, como sendo a quantidade adimensional:

(9-10)

Como consequência dessa definição se tem as seguintes condições:

Se *o <*  (circuito superamortecido) então *Q < 1/2*

Se *o =*  (circuito criticamente amortecido) então *Q = 1/2*

Se *o >*  (circuito subamortecido) então *Q > 1/2*

Observe-se que no circuito paralelo se tem *2 = 1/RC*, enquanto no circuito série se tem *2 = R/L*. Então, pela equação (9-10), tira-se:

Q = oRC para o circuito RLC *paralelo*

Q = o para o circuito *RLC série*

Na prática, um bom valor de *Q* é de algumas centenas. O circuito *LC* ideal, obviamente, tem um *Q infinito*.

Outra definição para o fator de qualidade, muito útil para medi-lo em laboratório, é dada da seguinte forma:

- Para o circuito *RLC* paralelo, *na ressonância*:

(9-11)

- Para o circuito *RLC* série, na ressonância:

(9-12)

Na prática, como os indutores e capacitores não são ideais, os fabricantes desses componentes costumam especificar, em função da frequência , um fator de qualidade, *QL*, para o indutor e um fator de perdas ou de dissipação, *DC*, para o capacitor, como segue:

, onde *Rb* é a resistência da bobina.

, onde *Rd* é a resistência do dielétrico

Portanto, e , onde *XL* e *XC* são as reatâncias do indutor e do capacitor, respectivamente.

Exemplo 10: Um circuito de 2a ordem tem para resposta natural a tensão:

Encontre o fator de qualidade do circuito.

Solução: comparando a tensão *vN* com a resposta natural de um circuito subamortecido, tira-se:

*= 1 rd/s* e 



Logo:

Exemplo 11: Suponha que o circuito de sintonia mostrado na figura 9-19, recebe na antena apenas um tom de frequência como, por exemplo, a tensão senoidal *va = cos(t)*. Encontre o valor da capacitância para que, na frequência de *105 rd/s*, o circuito entre em ressonância com *va*. Encontre os valores de *Q,* e nesta situação.



Fig. 9-19: Exemplo de um circuito de sintonia

Solução: A freqüência de ressonância do circuito é:

Portanto, como na ressonância *o = = 105 rd/s,* então tira-se o valor de *C* fazendo:

= 105, donde se encontra: *C = 0,1 F*.

Na ressonância tem-se que:

***Zeq*** *= R = 1*

*|****I****| = = = 1 A*

*= LI = 105.10–3.1 = 100 V*

*=* ***|VL|*** *= 100 V*

*Q = = = 100*.

9.9 FUNÇÃO DE REDE E RESPOSTA DE FREQUÊNCIA

Função de rede é a razão entre o *fasor resposta* e o *fasor excitação* de um circuito. Quando estes fasores estão em portas diferentes do circuito, a função de rede é chamada também de *função de transferência*.

Exemplo 12: Considere-se um circuito *RLC* paralelo, excitado por uma fonte de corrente senoidal, *is(t)*. Então, considerando-se como resposta a corrente *iR(t)* no resistor, a função de rede, denotada por ***H****(ω)*, desse circuito será a razão entre o fasor ***IR*** e o fasor ***Is***, ou seja:

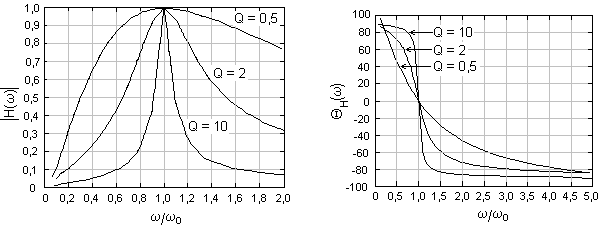
***H****() =* (9-13)

Na equação (9-13), multiplicando-se e dividindo-se a expressão entre parênteses por *oC*, chega-se à equação (9-14) em função do fator de qualidade e da frequência de ressonância:

***H****() =*  (9-14)

A magnitude (módulo) de ***H****()* dá a resposta de amplitude do circuito enquanto a fase de ***H****()* dá a resposta de fase, conforme mostram as equações abaixo com seus respectivos gráficos dados na figura 9-20

*|****H****()| =H() =*



(a) (b)

### Fig. 9-20: (a) Resposta em amplitude; (b) Resposta em fase

A curva de *|****H****()|* é chamada de resposta de amplitude enquanto que a curva de θH(ω) é chamada de resposta de fase. As duas juntas constituem a resposta de freqüência do circuito. Elas fornecem todas as informações sobre o comportamento na frequência de um dado circuito.

Note-se que a função de rede é uma característica intrínseca de cada circuito, independente da excitação aplicada. Assim, a resposta ***IR***, está relacionada à ***Is*** por:

***IR*** *=* ***H****()****Is***(9-15)

Analisando-se o gráfico da resposta em amplitude vê-se que, se  *= o* então *|****H****()| = 1* e. Se é muito maior ou muito menor que *o*, então *|****H****()|* será muito menor que *1* e, portanto, será muito menor que *1*. Assim, o circuito *RLC*, paralelo ou série, funciona como um filtro passa-faixa, com freqüência central *ωo*.

Para um circuito *RLC* série, alimentado por uma fonte de tensão senoidal *vs(t)*, a expressão de ***H****()* é a mesma da equação (9-14), considerando-se agora como resposta a tensão *vR* no resistor e lembrando que o fator de qualidade é *Q = oL/R*.

Exemplo 13: Seja uma fonte de corrente especificada por *is = cos(2t)*. Determine o fasor corrente ***IR*** no circuito *RLC* paralelo se: *o = 1 rd/s* e (a) *Q = 1/2*; (b) *Q = 2*; (c) *Q = 10*.

Solução: Usando-se a equação (9-15), tem-se para o fasor corrente:

***IR*** *=* ***H****()****Is*** ou *= |****H****()| , R = H + s*

Como: *|****H****()| =* e*H() =*, então:

a)  *= 2 rd/s, o = 1 rd/s* e *Q = 1/2*

*|****H****()| = 0,80* e *H = – 37o*

***IR*** *= 0,80e****–j****37*.

b)  *= 2 rd/s, o = 1 rd/s* e *Q = 2*

*|****H****()| = 0,316* e *H = – 72o*

***IR*** *= 0,316e****–j****72*.

c)  *= 2 rd/s, o = 1 rd/s* e *Q = 10*

*|****H****()| = 0,066 e H = – 86o*

***IR*** *= 0,06e****–j****86*.

**LARGURA DE BANDA DE UM FILTRO**

Para um filtro passa-faixa, largura de banda é a faixa de frequências onde, em seus extremos *(e* e *d*) se tem:

(9-16)

A figura 9-21 ilustra essa definição. As frequências *e* e *d (d > e)* são as extremidades da faixa, sendo a largura de banda dada por (*ωd – ωe*). Acima de *ωd* ou abaixo de *ωe* a potência da resposta é menor que a metade da potência da excitação. Por isso a equação (9-16) usada para o cálculo da largura de banda é conhecida como *critério de meia potência*.

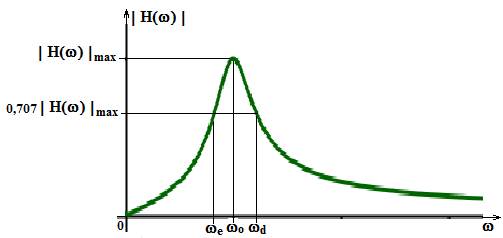


Fig. 9-21: Definição de largura de faixa

Para o circuito *RLC* em estudo tem-se , então utilizando a equação (9-16) tem-se:

E pela equação (9-14), tem-se:

*=*

ou *= 1* ou

Supondo *Q >> 1*, o que normalmente acontece na prática, tem-se a aproximação:

ou

Logo, as frequências laterais, para meia potência são:

À esquerda de *ωo*:

*À direita de 𝜔o*

Portanto, a largura de banda é:

(9-17)

No circuito *RLC* série foi visto que: , portanto:

No circuito *RLC* paralelo foi visto que: *Q = oRC*, portanto:

Exemplo 14: Encontre a função de rede ***E2****/****E1***, para o circuito mostrado na figura 9-22. Esboce a resposta em amplitude desse circuito.

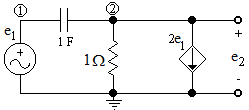


Fig. 9-22: circuito para o exemplo 14.

Solução: No nó 2 tem-se:

***j****C(****E2*** *–* ***E1****) + 1****E2*** *+ 2****E1*** *= 0*

*(****j****C + 1)****E2*** *= (****j****C – 2)****E1***

Com *C = 1 F* tem-se:

e

A figura 9-23 mostra o esboço de *|****H****()|*

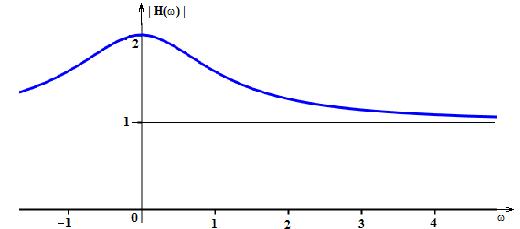


Fig. 9-23: resposta de amplitude do circuito da figura 9-21.

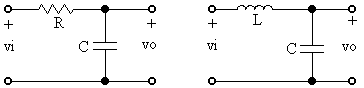
Exercício: A resposta de amplitude do circuito da figura 9-21 mostra que ele funciona como um filtro passa baixas. Encontre a frequência para a qual a potência na saída cai para a metade da potência de entrada. Esta frequência é denominada de frequência de corte do filtro.

**Resposta:** *É só fazer |****H****(𝜔)*| *=* (*1/√2*)|***H****(𝜔)*|*max 🡪 𝜔c = 2,51 rd/s*

**FUNÇÕES DE REDE DE ALGUNS CIRCUITOS TÍPICOS**

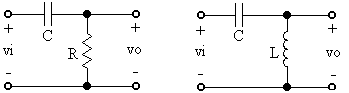
A seguir, apresentam-se alguns circuitos típicos, com suas respectivas funções de rede, utilizados principalmente como filtros.

- Filtros passa-baixas (Figura 9-24)



### Fig.9-24: exemplos de filtros passa baixas.

- Filtros passa-altas (Figura 9-25)



**Fig.9-25: exemplos de filtros passa altas.**

Exercício: Encontre a função de rede de cada um dos circuitos das figuras 9-24 e 9-25, considerando *vi* como a excitação e *vo* como a resposta. [Sugestão: aplique a fórmula do divisor de tensão para impedâncias]

9.10 POTÊNCIA EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

Em geral, na prática, tem-se a situação em que um circuito fornece potência a outro circuito. O circuito que fornece potência é denominado de *gerador*, e o circuito que absorve potência é denominado de *carga*, conforme ilustra a figura 9-26.

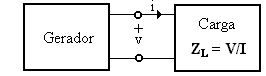


Fig. 9-26: Gerador e carga em regime senoidal

Supondo regime permanente senoidal para *v* e *i* tem-se:

*v(t) = Vpcos(t + v)* ou em forma de fasor: ***V*** *= Vpe****j****v*

*i(t) = Ipcos(t + I)* ou em forma de fasor: ***I*** *= Ipe****j****I*

Pode-se então definir as seguintes potências:

**POTÊNCIA INSTANTÂNEA**

É sempre o produto da tensão instantânea pela corrente instantânea, ou seja:

*p(t) = v(t).i(t) = VpIpcos(t + v) cos(t + I)*

*Utilizando a identidade trigonométrica: cosAcosB = ½cos(A – B) + ½cos(A + B), p(t) pode ser escrita como:*

*p(t) = VpIpcos(v – I) + VpIpcos(2t + v + I)*  (9-18)

O primeiro termo da equação (9-18) é uma constante que, como será mostrado, é a *potência média*. O segundo termo é uma senoide cuja frequência é o dobro da frequência da tensão ou da corrente.

**POTÊNCIA MÉDIA OU ATIVA**

É o valor médio da potência instantânea, ou seja:



*= VpIpcos(v – I)*

Observe-se que este resultado é exatamente o primeiro termo da equação (9-18) e que *v – I = Z*, portanto:

*P = VpIpcos(Z)* (9-19)

Para uma *carga resistiva* foi visto que *Z = 0o*, ou seja, *cos(Z) = 1,* então, de (9-19) tem-se:

*P = VpIp*(9-20)

Para uma carga puramente capacitiva ou puramente indutiva foi visto que *Z = + 90o*, então *P = 0*.

O termo *cos(v – I)* ou simplesmente *cos()* é denominado de *fator de potência* e escreve-se:

*fp = cos()* (9-21)

Como a corrente pode estar adiantada ou atrasada em relação à tensão, o fator de potência pode ser capacitivo, quando *v – I < 0*, ou indutivo quando *v – I > 0*. Resumindo:

- Se *Z < 0:* o fator de potência é capacitivo ou adiantado*.*

*- Se Z > 0:* o fator de potência é indutivo ou atrasado*.*

**POTÊNCIA COMPLEXA**

Em regime senoidal, quando se fala em potência sem maiores especificações, fica subtendido tratar-se de potência média. Entretanto, torna-se útil se definir outros tipos de potência, embora com significado puramente matemático. Estas potências são derivadas a partir da definição de potência complexa dada como segue:

***S*** *=* ***V.I\**** (9-22)

Porém, ***V*** *= Vpe****j****v e* ***I\**** *= Ipe-****j****i*, então, substituindo estes fasores na equação (9-22), vem:

***S*** *= VpIpe****j****(θv – θi) =*

*= VpIpcos(Z)+* ***j****VpIpsen(Z )= P +* ***j****Q* (9-23)

Como se pode ver na equação (9-23), a potência complexa é composta de duas parcelas: a primeira, *P*, que é a própria potência média, e a segunda, *Q*, chamada de *potência reativa*. Portanto, pode-se escrever:

*P = Re*{***S***} *= Re*{***VI\****} (9-24)

*Q = Im*{***S***} *= Im*{***VI\****} (9-25)

Para se diferenciar da *potência média* (dada em *Watt*), a *potência reativa* costuma ser dada em *VAR* (*Volt-Ampère Reativo*). A potência reativa deve ser vista como a parcela da potência complexa que só existe quando há elementos armazenadores de energia (capacitor e indutor) no circuito. Um alto valor de potência reativa significa baixo fator de potência, indicando prejuízo para a concessionária de energia elétrica e para o consumidor. Tal é sua importância que, para os grandes consumidores, são instalados, também, medidores de potência reativa. A correção do fator de potência, neste caso passa a ter grande importância para o consumidor, que deve procurar sempre que possível corrigir o fator de potência para um valor mais próximo de *1*.

OBSERVAÇÃO: A legislação brasileira, sob o decreto no 479 de 20/03/1992, estabelece o valor mínimo para o fator de potência como sendo:

. *0,92 indutivo* das 6h às 24h

.*0,92 capacitivo* das 0h às 6h

Fazendo ***V*** *=****ZI*** ou ***I*** *=* ***YV*** na equação (9-24), encontra-se uma expressão muito útil para a potência média dada por:

*P = Ip2Re*{***Z***}ou *P = Vp2Re*{***Y***} (9-26)

Para a potência reativa, pode -se escrever:

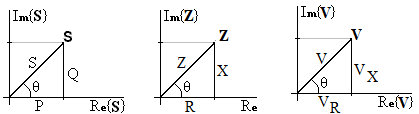
**POTÊNCIA APARENTE**

É simplesmente o valor absoluto da potência complexa, ou seja:

(9-27)

A potência aparente é dada em *VA* (*Volt-Ampère*). Ela é normalmente usada para indicar o limite de capacidade de um gerador ou transformador, geralmente dada em *KVA*. O motivo pelo qual essa potência é dada em *KVA*, em lugar de *KW*, é que esses equipamentos têm fixos os valores de tensão e o valor limite de corrente que podem suportar sem aquecimento excessivo, porém o fator de potência vai depender da carga que vai ser ligada. Assim, a potência aparente é um valor especificado a priori e, *para obter o limite de potência média do equipamento, basta multiplicar a potência aparente pelo fator de potência da carga*.

No plano complexo de ***S***, pode-se visualizar um triângulo, mostrado na figura 9-27(a), chamado de triângulo de potências, que resume o que foi visto sobre as várias potências.



1. (b) (c)

**Fig. 9-27: Triângulo (a) de potência; (b) de impedância; (c) de tensão.**

Nos triângulos mostrados na figura 9-27, *cos()* é o fator de potência, que pode ser encontrado pela razão *P/S*, *R/Z* ou *VR/V*. Se *Q* ou *X* são negativas, significa que *θ* é negativo e, portanto, o fator de potência é capacitivo (corrente adiantada em relação a tensão).

Exemplo 15: A tensão *v(t) = 300cos(20t + 30o) V* aplicada a um circuito faz surgir uma corrente *i(t) = 15cos(20t – 25o) A*. Achar a impedância do circuito, o fator de potência, as potências: média, reativa, aparente, máxima e mínima.

Solução: a impedância do circuito será:

***Z*** *=* ***V/I*** *= (300 /30o) / (15 /–25o) = 20/55o. ou* ***Z*** *= 11,47 + j16,38.*

*fp = cos(z) = cos(55o) = 0,574 indutivo (atrasado)*.

*P = VpIpcos(**z) = (0,5)(300)(15)(0,574) = 1290 W.*

*Q = VpIpsen(z) = (0,5)(300)(15)(0,82) = 1843 VAR*.

*S = VpIp = (0,5)(300)(15) = 2250 VA.*

*p(t) = 300cos(20t + 30o). 15cos(20t – 25o) = 1290 + 2250cos(40t + 5o)*

*pmax = 1290 + 2250 = 3540 W* e *pmin = 1290 – 2250 = – 960 W*.

O valor negativo na potência mínima indica que em determinados instantes o circuito está liberando potência em vez de recebê-la.

Exemplo 16: Uma fonte de tensão senoidal *vs(t) = 20cos(100t – 15o)* alimenta um indutor não ideal que pode ser visto como um indutor ideal de *120 mH* em série com um resistor de *25* . Encontre a potência média e a potência reativa fornecida a esse indutor não ideal.

Solução: A impedância vista pela fonte será:

***Z*** *= R +* ***j****L = 25 +* ***j(****100)(0,12) = 25 +* ***j****12* ou***Z*** *= 27,73 /25,64o*

***I*** *= = (20 / – 15o)/(27,73 /25,64o) = 0,72 / – 40,64o*

*P = Ip2Re{****Z****} = (0,5)(0,72)2(25) = 6,50 W*

*= (0,5)(0,72)2(12) = 3,11 VAR*

Note que o fator de potência é *fp = 0,90 atrasado*.

Exercício: Refazer o exemplo 16 mudando o valor da indutância para *500 mH*.

**Resposta***: P = 1,62 W e Q = 1,62 VAR.* Note que *fp = 0,71 atrasado.*

**VALOR EFICAZ OU VALOR RMS DE UMA TENSÃO OU CORRENTE**

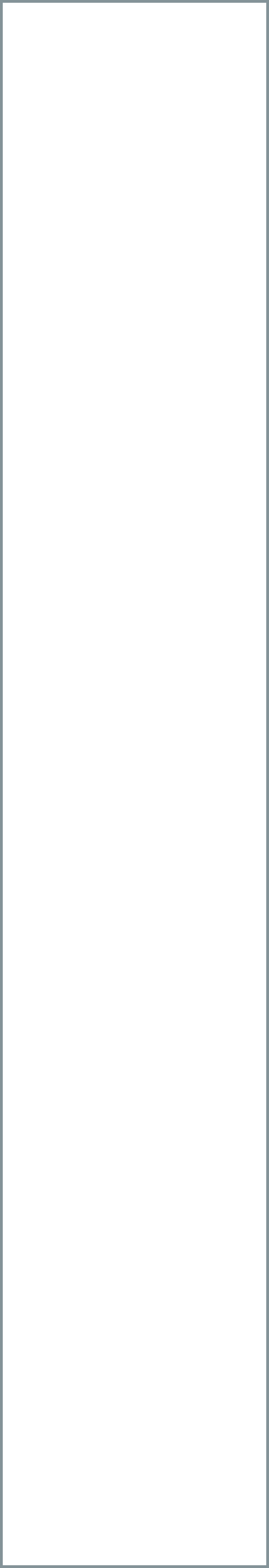
Valor eficaz de uma corrente ou tensão variante no tempo é um valor constante que produz a mesma potência média produzida pela corrente ou tensão variante no tempo.

Seja, por exemplo, calcular a potência média dissipada por um resistor submetido a uma corrente variante no tempo e em seguida calcular um valor de corrente constante que produz esta mesma potência, então, com uma corrente variante *i(t)* tem-se:

Para uma corrente constante, *I*, a potência média é:

*PDC = RI2*

Igualando-se as duas potências tira-se o valor de *I* que será o valor eficaz da corrente *i(t)*. Portanto:





Donde se tira o valor de *I* como sendo o valor eficaz da corrente *i(t)*. Assim, tem-se:

*I = Ief = * (9-28)

Quando a corrente ou tensão são senoidais tira-se da equação (9-28) que:



Ou, para a tensão:



A potência média dissipada num resistor, submetido a uma excitação senoidal pode agora ser dada por:

*P = VpIp = 2 Vef.2 Ief = Vef.Ief*

Para uma impedância qualquer, se tem para a potência média:

*P = Ip2Re{****Z****} =(2 Ief)2Re{****Z****} = Ief2Re{****Z****}*

E a potência reativa fica dada por:

A potência aparente agora fica: *S = VefIef*

Observe-se, portanto que, quando se trabalha com valor eficaz, o fator (*1/2*) não entra no cálculo das potências.

Exemplo 17: Um transformador tem as seguintes especificações dadas em valores eficazes: *110 V / 22 kVA*. Pede-se: (a) Seu limite de corrente; (b) O limite de potência em *kW* quando o fator de potência da carga for *0,80*; (c) O que ocorreria caso fossem exigidos desse transformador os *22 kW* com fator de potência igual a *0,80*?

Solução: Em valores eficazes, a potência aparente é dada pela equação:

*S = Vef.Ief*

Como *S = 22 kVA* e Vef = 110 V, então o limite de corrente será:

Para um fator de potência de *0,80*, o limite de potência média será dado por:

*P = Vef.Ief.cos() = 22(0,80) = 17,6 kW*.

Se fossem exigidos *22 kW* de potência média, se teria:

*VefIefcos() = 22 kW = 110Ief (0,80)*

Donde se tira: *Ief = 250 A*.

Ou seja, a corrente chegaria a *250 A* e haveria aquecimento em excesso, já que o limite é de *200 A*.

Exemplo 18: Encontre a potência média dissipada por um resistor que é atravessado pela corrente periódica mostrada na figura 9-28.

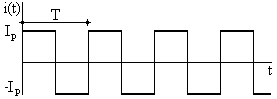


Fig. 9-28

Solução: da figura 9-28 tira-se:

*i(t) = Ip* para *0 < t < T/2* e *i(t) = – Ip* para *T/2 < t < T*

Então, usando-se a equação (9-28) para o cálculo do valor eficaz, encontra-se:

Então:

*P = Ief2R = Ip2R*

Exercício: Encontre o valor eficaz da tensão dada por *v(t) = sen(3t) + cos(3t + 60º)* e a potência média dissipada por um resistor de *2 Ω* quando alimentado por esta tensão.

**Resposta:** *0,366 V; 66 mW*

**TEOREMA DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA**

Considere-se o esquema mostrado na figura 9-29, onde a fonte de tensão ***Vs*** em série com a impedância ***Zs*** representa o equivalente de Thévenin de algum circuito em regime permanente senoidal, alimentando um outro circuito representado por uma carga de impedância ***ZL***.

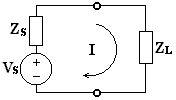


Fig. 9-29: Equivalente de Thévenin em regime permanente senoidal

Para haver máxima transferência de potência para a carga ***ZL***, ou, como se diz na prática, para haver casamento de impedâncias,deve-se ter:

***ZL*** *=* ***Zs****\** (9-29)

Seja ***ZL*** *= RL +* ***j****XL* e***Zs*** *= Rs +* ***j****Xs*

Então, da equação (9-29) tem-se que:

*RL = Rs* e *XL = –Xs*

A potência média entregue a carga será:

*PL = Ip2Re{****Z****}*

Onde:

Assim:

Na condição de máxima transferência se tem:

***ZL*** *=* ***Zs\**** e, portanto: ***ZL*** *+* ***Zs*** *= 2Rs*

Consequentemente, tem-se a potência máxima:

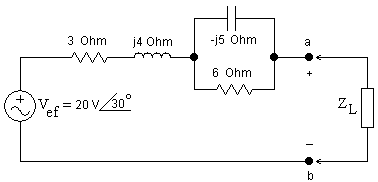
(9-30)

Ou, trabalhando com valor eficaz, substitui-se *Vsp =*  na equação (9-30), e obtém-se:

(9-31)

Exercício: Encontre o equivalente de Thévenin na porta *ab* do circuito mostrado na figura 9-30 e determine o valor da carga *ZL* para que o circuito transfira máxima potência a ela.

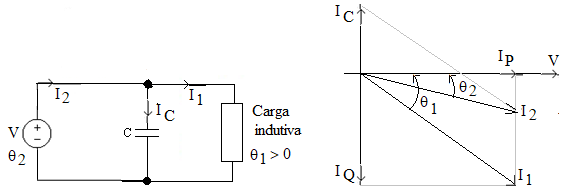
**Resposta:** Vth = 20 / 30º ; Zth = 5,46 + j1,05; ZL = 5,46 – j1,05.



**Fig. 9-30: Circuito para aplicação de máxima transferência de potência**

9,12 CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

A maioria das instalações elétricas é indutiva, o que implica que a corrente está atrasada em relação à tensão. Como as concessionárias de energia elétrica têm, para consumidores industriais, uma tarifa mais alta para cargas com um fator de potência inferior a um certo limite (atualmente, 0,92), muitas vezes é economicamente interessante corrigir o fator de potência para ficar nesse limite ou acima dele. Essa correção, numa instalação monofásica, se faz ligando um capacitor (ou um banco de capacitores) em paralelo com a carga, como indicado na figura 9-31(a). Na figura 9-31(b), indica-se o diagrama fasorial correspondente a esse circuito. Esse diagrama mostra que a corrente capacitiva, **IC**, compensa a corrente reativa, **IQ**, da carga, ambas em quadratura com a tensão **V**, reduzindo assim a corrente de **I1** para **I2**, na linha de transmissão, sem alterar a potência ativa do circuito. Consequentemente, aumenta-se o fator de potência global do circuito.



1. (b)

**Fig. 9-31: (a) circuito com capacitor de correção; (b) diagrama fasorial**.

Do diagrama fasorial, figura 9-31(b), tira-se:

***I2*** *=* ***IC*** *+* ***I1***

A potência aparente complexa, após a inclusão do capacitor, será:

***S2*** *=* ***VI2\**** *=* ***VIC\**** *+* ***VI1\**** *= P +* ***j****Q2*

Onde: ***VIC\**** *= 0 +* ***j****QC* e ***VI1\* =*** *P +* ***j****Q1 .* Somando estas duas equações e igualando a equação anterior, tira-se:

*QC = Q2 – Q1*.

Mas, *QC = VICsen(–90º) = V(ωCV)sen(–90º) = –V2ωC*

Substituindo esta equação na anterior, tira-se:

Ou ainda, como *Q2 = Ptg(* e, então tira-se também:

Estas fórmulas permitem o cálculo direto da capacitância que corrige o fator de potência para *f2 = cos*.

Exemplo 19: Em uma pequena fábrica, a demanda de potência ativa é de *800π* Watts com fator de potência de *0,8 indutivo*. O fornecimento de energia elétrica é feito por uma rede elétrica monofásica com tensão fase-neutro de valor eficaz de *200 V* e com frequência de *60 Hz*. Desejando-se instalar um capacitor, entre fase e neutro, para corrigir o fator de potência, tornando-o unitário, qual deve ser o valor da capacitância, em *μF*, desse capacitor?

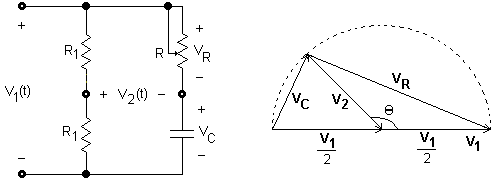
**Solução***: 🡪*

Como o fator de potência deve ser corrigido para o valor 1(um), então a potência reativa, *Q2*, após a inserção do capacitor, será nula, então:

Exercício: (Petrobrás-2011) Um circuito elétrico alimenta um equipamento que absorve a potência de *KVA*, com fator de potência indutivo. Deseja-se elevar o fator de potência desse circuito para indutivo. Qual a potência reativa, em *KVAr*, do banco de capacitores que deve ser instalado?

9.11 APLICAÇÕES

(1) Circuito defasador: O circuito mostrado na figura 9-31(a), alimentado com uma tensão senoidal *v1(t)*, de frequência *ω*, produz uma defasagem, *θ*, na tensão *v2(t)*, de 0o a *180o* quando a resistência *R* varia de zero a infinito. O diagrama fasorial mostrado na figura 9-31(b) mostra que os fasores ***V1****,* ***VR***e***VC*** sempre formam um triangulo retângulo, qualquer que seja o valor de ***VR***. Portanto, variando-se ***VR*** através de *R*, varia-se *θ* que representa a defasagem entre ***V****1* e ***V2***. Fica para o estudante demonstrar o relacionamento entre estes fasores. [Sugestão: aplique a lei de Kirchhoff para as tensões nos percursos envolvendo *v1, v2, vR* e *vC*].



(a) (b)

**Fig. 9-31: (a) Circuito defasador; (b) Diagrama fasorial**.

(2) Bobina de bloqueio em linha de transmissão: é comum se fazer transmissão de voz e dados através dos fios de uma linha de transmissão de alta tensão. Como a transmissão de energia elétrica é feita em baixa frequência (60 Hz ou 50 Hz) enquanto a transmissão de voz e dados é feita em frequências elevadas (da ordem de MHz), existe a necessidade de se separar estas frequências (multiplexá-las) para a transmissão na mesma linha. Esta separação é feita pelo dispositivo conhecido como bobina de bloqueio, conforme ilustra a figura 9-32.

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

**Fig. 9-32: Bobina de bloqueio.**

ANEXO

**CONSUMO DE ENERGIA DE ALGUNS APARELHOS**

A tabela 1 mostra a potência média e o consumo mensal de energia em *kWh* de alguns eletrodomésticos. Os valores de consumo de energia foram obtidos estimando-se o número de horas que o aparelho permanece ligado por mês. Assim, por exemplo, no caso de um forno de microondas, com uma potência de *1450 W* e um consumo mensal de *16 kWh*, a estimativa foi de que o microondas permanece ligado *16/1,45 = 11,03 horas por mês*, o que corresponde a aproximadamente *22 minutos por dia*.

Os dados desta tabela são valores típicos. Ao se usar esses números para fazer alguma projeção, é preciso levar em conta fatores como o modelo e marca do aparelho e as condições e local de uso do mesmo. Observe-se que as potências não devem ser somadas para calcular o consumo de uma dada residência, já que em geral nem todos os aparelhos estarão em uso ao mesmo tempo.

**Tabela 1: Consumo mensal de energia elétrica de alguns eletrodomésticos**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| APARELHO ELÉTRICO | POTÊNCIA MÉDIA (*W*) | DIAS DE USO POR MES | TEMPO MÉDIO POR DIA | CONSUMO MENSAL (*KWh*) |
| Cafeteira | *1200* | *30* | *20 min* | *12* |
| Liquidificador | *270* | *30* | *19,26 min* | *2,6* |
| Batedeira | *127* | *5* | *1,6 min* | *0,16* |
| Forno de microondas | *1450* | *30* | *22 min* | *16* |
| Torradeira | *1146* | *30* | *5,67 min* | *3,25* |
| Secadora | *1100* | *30* | *1 h* | *33* |
| Lavadoura | *512* | *30* | *33,60 min* | *8,6* |
| Condicionador de ar 7000 BTU (\*\*) | *860* | *30* | *2,77 h* | *71,6[[1]](#footnote-1)(\*)* |
| Condicionador de ar 10000 BTU | *1500* | *30* | *10 h* | *450,0(\*)* |
| Condicionador de ar 12000 BTU | *1700* | *30* | *10 h* | *510,0(\*)* |
| Bomba d'água 1/4 HP | *250* | *30* | *1 h* | *7,5* |
| Bomba d'água 3/4 HP | *552* | *30* | *2 h* | *33,1* |
| Chuveiro (chave verão) | *3000* | *30* | *1 h* | *90* |
| Carregador de celular | *10* | *30* | *6 h* | *1,8* |
| Elevador predial p/ 6 pes. 12 HP | *8832* | *30* | *6 h* | *1589.7* |
| Ferro elétrico automático | *1000* | *8* | *4 h* | *32* |
| Freezer horizontal 480 e 600 L | *300* | *30* | *12 h* | *108,0* |
| Freezer vertical 280 L | *150* | *30* | *12 h* | *54,0* |
| Furadeira pequena | *350* | *1* | *2 h* | *0,7* |
| Geladeira (1 porta) 253 litros | *90* | *30* | *10 h* | *27* |
| Geladeira duplex | *150* | *30* | *12 h* | *54,0* |
| Lâmpada fluorescente 40 W + Reat. | *62* | *30* | *6 h* | *11,16* |
| Microcomputador / Impressora | *250* | *30* | *2 h* | *15* |
| Máquina de costura | *138* | *2* | *6 h* | *1,7* |
| Máquina de lavar roupa | *1000* | *8* | *6 h* | *48,0* |
| Exaustor | *200* | *30* | *2 h* | *12* |
| Ventilador | *88* | *30* | *1,36 h* | *3,6* |
| Aquecedor | *1322* | *10* | *22 min* | *14,6* |
| Secador de cabelo | *600* | *5* | *7 min* | *2,1* |
| Barbeador elétrico | *15* | *12* | *5,6 min* | *0,042* |
| Lâmpada solar | *279* | *4* | *9,5 min* | *1,33* |
| Televisão em cores | *145* | *30* | *6,11 h* | *26,6* |
| Aspirador de pó | *630* | *5* | *12,16 min* | *3,83* |

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



SENOIDE E FASOR CORRESPONDENTE:

*v(t) = Vpcos(t + )* 🡨🡪 ***V*** *= Vpe****j***

IMPEDÂNCIA (***Z***) E ADMITÂNCIA (***Y***):

,

No resistor: ***Z =*** *R****,*** , No capacitor: , No indutor:

FATOR DE QUALIDADE: , FUNÇÃO DE REDE:

POTÊNCIA EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL:

Instantânea: *p(t) = v(t)i(t)*, Média: *P = VpIpcos(v – I) ,* Reativa: Q *= VpIpsen(v – I)*

Complexa: ***S*** *=* ***V.I\**** ou ***S*** *= P +* ***j****Q* , Fator de potência: *fp =* *cos*(*v – I*) = *cos*(*Z*)

VALOR EFICAZ OU VALOR RMS:

Para qualquer função periódica:

Especificamente para a senoide com valor de pico *Vp*:

**PROBLEMÁTICA**

1) Realizar as seguintes operações com números complexos:

a) *1 /* ***j****0,25* b) *1 / (0,2 +****j****0,5)* c) *(14 +* ***j****5) / (4 –* ***j****1)* d) *(14 +* ***j****5)(4 –* ***j****1)*

2) Converter os seguintes números complexos para forma exponencial ou polar:

a) *6 +* ***j****9* b) *–21,4 +* ***j****33,3* c) ***j√2*** d) *4,23 +* ***j****4,23* e) *–3*

3) Converter os seguintes números complexos para a forma exponencial ou polar:

a) *1000 +* ***j****2* b) *4 –* ***j****963*

4) Usando os números complexos do problema (2) realize as seguintes operações:

a) *(a) + (b)* b) *(a) × (c)* c) *(b) – (e)* d) *(b) / (d)* e) *(a)\* × (b)\**

5) Converter os seguintes números complexos para a forma retangular:

a) 10,2 /20o b) *6,41 /-30o* c) *–142 /–80,3o* d) *142 /–260,3o* e) *–142 /–440,3o*

6) Usando os números complexos do problema 5 realize as seguintes operações, expressando o resultado na forma polar.

a) *(a) × (b)* b) *(c) / (d)* c) *(d) + (e)* d) *(c)\* × (e)\** e) *(a) / (b)\**

7) Achar os fasores correspondentes às seguintes tensões senoidais:

a) *v(t) = 50sen(377t – 35o)* b) *v(t) = 3,46cos(377t + 75o)*

c) v(t) = *–155,56sen(377t)* d) *83,6cos(377t – 15o)*

8) Achar uma senoide simples equivalente à soma das senoides do problema 7

9) Achar as correntes senoidais, de frequência *ω*, correspondentes aos seguintes fasores:

a) *10,2 /20o* b) *6,41 /–30o* c) *–142 /–80,3o* d) *142 /–260,3o* e) –142 /–440,3o

10) Achar uma senoide simples, quando possível, que é o equivalente a cada uma das seguintes expressões:

a) *6,23sen(t) + 9,34cos(t)* b) 5sen(377t) + 6cos(754t)

11) Para o circuito mostrado na figura P9-1, achar *vs* se *v1 = 10,2sen(754t + 30o) V, v2 = 14,9sen(754t – 10o) V* e *v3 = 16,1cos(754t – 25o) V*.

**Resposta: *Vs*** *= 30,3 +****j****17,11 ou* ***Vs*** *= 34,80e****j****29,44º, então: vs(t) = 34,80sen(754t + 29,44o)*

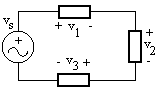


Fig. P9-1

12) No circuito mostrado na figura P9-2, os voltímetros *VM1* e *VM2* têm leituras eficazes de *30 V* e *40 V*, respectivamente. Achar a leitura do voltímetro *VM3*. Sabe-se que a fonte de tensão é senoidal.

**Resposta**: *50 V*.

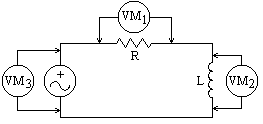


Fig. P9-2

13) Achar *vs*, em regime permanente senoidal, para o circuito mostrado na figura P9-3, sabendo que a corrente da fonte vale *is = 0,234sen(3000t – 10o) A*. Verifique se o circuito está em ressonância.

**Resposta:** *95,2sen(3000t + 38,4o)*. *Não*

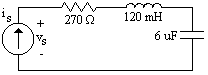


Fig. P9-3

14) Achar *is*, em regime permanente senoidal, para o circuito mostrado na figura P9-4 sabendo que *vs = 150sen(2500t – 34o) V*. Verifique se o circuito está em ressonância.

**Resposta:** *15,2sen(2500t – 43,5o) A*. *Não*.

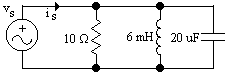


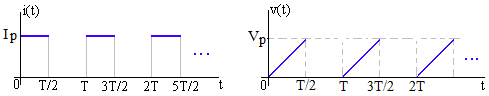
Fig. P9-4

15) Para o circuito da figura P9-3, supondo que esteja em ressonância, encontre a tensão no indutor e no capacitor.

16) Uma bobina não ideal, vista como um indutor em série com um resistor, excitada por uma tensão eficaz de *120 V* em *60 Hz*, solicita uma corrente de *2 A* que se atrasa com relação à tensão aplicada em *40o*. Quais são a resistência e a indutância da bobina?

**Resposta:** *46 ; 0,102 H*.

17) Para cada um dos sinais elétricos, periódicos, mostrados na figura P9-5, calcular o valor eficaz e a potência média dissipada em um resistor de resistência *R*, submetido a esses sinais.



(a) (b)

### Fig. P9-5

18) Um resistor de *30*  é submetido a uma tensão senoidal *v(t) = 170cos(120π + 30o) V*. Qual a potência média dissipada pelo resistor? Quê valor de tensão contínua faria o resistor dissipar a mesma potência?

19) A corrente através de um resistor de *62*  é dada por *i(t) = 30Sen(200t + 30o ) A*. Achar a tensão no resistor bem como a potência média dissipada por ele.

20) Encontre a potência complexa e as potências média e reativa, para um elemento de um circuito onde *v(t) = 6Sen(377t + 10o ) V* e *i(t) = 0,3Sen(377t – 20o ) A*. Quê elemento é esse?

21) Se a tensão sobre um elemento de um circuito é *v(t) = 40Sen(400t + 10o ) V*, para uma corrente *i(t) = 34,1Sen(400t +10o ) mA*, qual é este componente e qual é sua impedância?

22) Achar o valor eficaz de uma tensão periódica que tem um valor de *20 V* para metade de um período e

*–10 V* para a outra metade.

23) A tensão *v(t) = 30Sen(200t + 30o ) V* está sobre um indutor ideal que tem uma reatância de *62* . Achar a indutância, a corrente e a potência média fornecida a ele.

24) Achar a impedância total, na forma polar, de um indutor de *0,5 H* em série com um resistor de *20*  para:

(a) *f = 0 Hz* (b) *f = 10 Hz* (c) *f = 10 KHz*.

25) Para cada um dos circuitos mostrados na figura P9-6, encontre a função de rede, considerando que *vi(t)* é a excitação e *vo(t)* é a resposta.

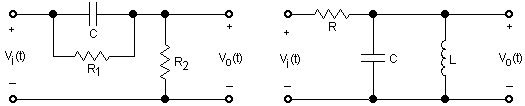


Fig. P9-6

26) Para cada um dos circuitos mostrados na figura P9-7, encontre a função de rede, considerando que *i1(t)* é a excitação e *i2(t)* é a resposta.

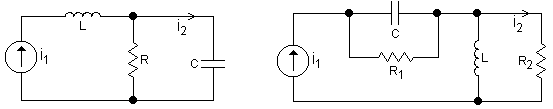


Fig. P9-7

27) Em um laboratório, foi montado o circuito da figura P9-8, para medir a indutância *L* de uma bobina e a resistência *r* do seu enrolamento.

a) Uma aluna observou que o valor de *Vac* era diferente do valor da soma das tensões *Vab* e *Vbc*, e afirmou: “as medidas são incoerentes, portanto devem estar erradas”. Analise essa afirmativa. (As medidas, em valores eficazes, foram: *Vab = 84 V, Vbc = 70 V* e *Vac = 120V*).

b) Determine o valor da resistência *r* do enrolamento da bobina.

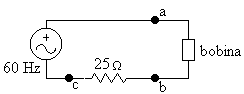


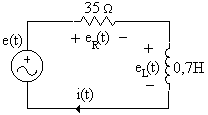
Fig. P9-8

28) Na figura P9-9, o circuito é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com *e(t) = 500cos(100t + 40o ) V*.

Determine os valores dos fasores ***E****,* ***I****,* ***ER*** *e* ***EL***.

Trace o diagrama fasorial para as tensões.

Determine a expressão, no domínio do tempo, da queda de tensão *eR(t)* no resistor.



**Fig. P9-9.**

29) Duas tensões senoidais de frequências diferentes agem sobre um resistor. Seus valores eficazes são: *300V* e *400V*. Calcular o valor eficaz da soma destas duas senoides.

30) Um televisor é conectado a uma antena através de um cabo de impedância igual a *200* , conforme mostrado na figura P9-10, com *vs = 4cos(t) mV*. A estação de TV é recebida em *52 MHz*. Determine a potência média entregue à carga se:

a) A impedância de carga do televisor é de *300* .

b) Dois televisores idênticos são conectados em paralelo

c) A impedância do cabo for escolhida de modo a fazer o casamento (transferência máxima de

potência) da antena com os dois televisores em paralelo.

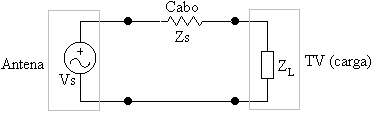


Fig. P9-10

31) O circuito que alimenta as tomadas de uma cozinha residencial típica é protegido por um disjuntor de *20A*. Suponha que os seguintes aparelhos de *120 V* sejam ligados simultaneamente: uma cafeteira elétrica, um liquidificador, um forno de microondas e uma torradeira. Tomando como base a tabela *V*, o circuito será interrompido pelo disjuntor? Prove!

32) Uma fábrica trabalha com uma carga elétrica de *1600 kW* cujo fator de potência é *0,8* atrasado. A fábrica adquire um novo equipamento que dissipa uma potência de *320 kW*. O fator de potência da nova carga deve ser ajustado para que o fator de potência global da fábrica seja *0,96* adiantados.

(a) Especifique a potência reativa associada à nova carga.

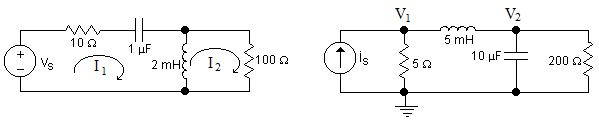
(b) A nova carga recebe ou fornece potência reativa?

(c) Qual deve ser o fator de potência da nova carga?

(d) Suponha que a tensão *RMS* na entrada da fábrica seja *2400 V*. Qual é o valor *RMS* da corrente na entrada da fábrica antes que o novo equipamento seja instalado?

(e) Qual é o valor *RMS* da corrente na entrada da fábrica depois que o novo equipamento é instalado?

33) Para o circuito mostrado na figura P9-12(a), suposto em regime senoidal, escrever as equações de malha, usando o conceito de impedância, admitância e fasor. Para o circuito da figura P9-12(b), escreva as equações de nó.

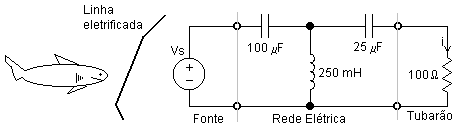


(a) (b)

**Fig. P9-12**

34) Para os circuitos do problema 33, encontre as impedâncias equivalentes vistas pelas fontes *vs* e *is* cuja frequência de ambas é *1 rd/s*. Que frequências devem ter cada uma dessas fontes para que seus respectivos circuitos entre em ressonância ?

35) A necessidade de proteções contra tubarões, sob o aspecto ambiental aceitável se manifesta quando alguns hotéis se localizam ao longo de águas infestadas de tubarões. Uma solução é usar uma linha eletrificada submersa na água de modo a deter os tubarões, como mostrado na figura P9-13(a). O modelo de circuito da rede eletrificada é mostrado na figura P9-13(b), onde o tubarão é representado por uma resistência equivalente de *100* . Determine a corrente que flui através do corpo do tubarão, *i(t)*, quando *vs = 375cos(400t) V*.

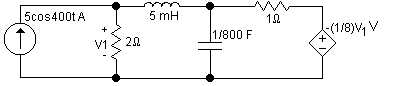


(a) (b)

#### **Fig P9-13**.

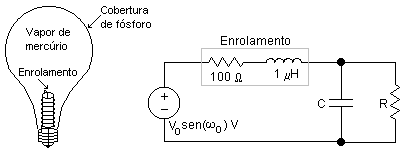
36) Muitos engenheiros estão trabalhando no desenvolvimento de usinas geradoras fotovoltaicas que fornecem potência em corrente alternada (*CA*). O modelo de uma parte do circuito de conversão de energia é mostrado na figura P9-14. Encontre as potências média, reativa e complexa liberadas pela fonte dependente.

**Resposta:** *S = j8/9 VA*.



**Fig. P9-14**.

37) Está sendo desenvolvida uma nova lâmpada eletrônica (*E-lamp*) que usa um oscilador de radiofrequência senoidal e um enrolamento para transmitir energia para o vapor de mercúrio que o envolve, como mostrado na figura P9-15(a). O gás de mercúrio emite luz ultravioleta, a qual é transmitida para a cobertura de fósforo, que, por sua vez, emite luz visível. Um modelo de circuito para a *E-lamp* é mostrado na figura P9-15(b). A capacitância *C* e a resistência *R* são dependentes do projeto interno da lâmpada e do tipo de fósforo. Selecione *R* e *C* de tal modo que a potência máxima seja liberada para *R*, o que está relacionado com a cobertura de fósforo. O circuito opera em *o = 107 rd/s*.



(a) (b)

### Fig. P9-15

38) Dado um circuito *RLC* com *Q = 500*, quantos períodos devemos esperar para ter a envoltória da resposta natural, reduzida a *10 %* de seu valor de pico do 1o período?

**Resposta***: 366 períodos*

39) Considere dois circuitos *RLC* lineares e invariantes no tempo. O 1o é um circuito paralelo com parâmetros: *R1, L* e *C* e o 2o é um circuito série com parâmetros: *R2, L* e *C*. Encontre a expressão de *Q* para cada um dos circuitos. Se os dois circuitos tiverem o mesmo valor para *Q*, quê relação existirá entre R1 e *R2*? O que acontece com *R1* e *R2* quando *Q* tende a infinito?

**Resposta***: Q1 = woR1C, Q2 = woL/R2, R1R2 = L/C*

40) Dado um circuito *RLC* paralelo linear e invariante no tempo, com *o = 10 rd/s, Q = ½* e *C = 1 F*, escreva a equação diferencial desse circuito e determine a resposta natural para a tensão *vc(t)*, no capacitor. Suponha as condições iniciais: *vc(0) = 2V* e *iL(0) = 5A*.

41) Encontre a admitância equivalente vista pela fonte de corrente *is* e a tensão no capacitor, no circuito da figura P9-16 que está em regime permanente senoidal. Dado *is(t) = 10cos(1000t) A*.

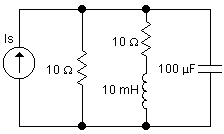


Fig P9-16

42) Mostre que o valor eficaz de uma tensão *v(t)* dada pela soma de uma tensão *dc* com uma tensão *ac* é:

, onde *v(t) = vdc + vac*, com *vdc = Vo* e *vac = Vpcos(*

1. (\*) Este valor pode variar consideravelmente, dependendo da localização e tamanho do ambiente.

   (\*\*) BTU (British Thermal Unit) – Unidade Térmica Britânica – é uma unidade de medida de potência de refrigeração de um aparelho de refrigeração. [↑](#footnote-ref-1)