CAPÍTULO 7

**CIRCUITOS RL E RC**

7.1 INTRODUÇÃO

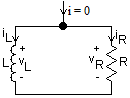
Circuitos que contêm somente um elemento armazenador de energia, como os circuitos *RC* e *R*L, são chamados de *circuitos de 1a ordem* porque as equações diferenciais que os descrevem são equações diferenciais de 1a ordem.

Serão analisados três tipos de resposta dos circuitos *RL* e *RC*: a *resposta natural* ou *resposta livre* que só depende da energia interna inicial armazenada pelo circuito, não havendo nenhuma fonte externa atuando. A *resposta forçada* ou *resposta de regime estacionário,* que só depende das excitações externas atuando no circuito, sendo nulas as condições iniciais e, finalmente, a *resposta completa* que é a soma das duas anteriores.

7.2 RESPOSTA NATURAL DE CIRCUITOS RL E RC

**CIRCUITO RL SEM FONTES DE ENERGIA**

A análise será feita sobre o circuito mostrado na figura 7-1 onde se admite que, no instante inicial *to = 0*, há uma corrente inicial não-nula *iL(0)* no indutor.



**Fig. 7-1: Circuito RL sem excitação**

Analisando-se o circuito desta figura segundo as leis de Kirchhoff tira-se:

*iL + iR = 0* ou *iR = –iL*

*vL – vR = 0*

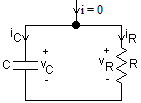
e, como e *vR = RiR = –RiL*, então, da equação anterior tira-se:

ou  (7-1)

Esta equação diferencial de 1a ordem, homogênea e de coeficientes constantes, quando resolvida, fornece como resposta natural a corrente no indutor para qualquer instante *t > 0*.

**CIRCUITO RC SEM FONTES DE ENERGIA**

Será feita a análise sobre o circuito da figura 7-2 onde se admite que no instante inicial, *to = 0*, há uma tensão inicial não-nula *vC(0)* no capacitor.



**Fig. 7-2: Circuito RC sem excitação**.

Analisando-se o circuito desta figura segundo as leis de Kirchhoff tira-se:

*vC – vR = 0* ou *vR = vC*

*iC + iR = 0*

e, como e *,* então, da equação anterior tira-se:

ou (7-2)

Esta equação diferencial de 1a ordem, homogênea e de coeficientes constantes, quando resolvida, fornece como resposta natural, a tensão no capacitor para qualquer instante *t > 0*.

7.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE PRIMEIRA ORDEM

Viu-se que as equações diferenciais para os circuitos *RL* e *RC*, sem excitação, têm a forma geral:

(7-3)

A equação diferencial (7-3) pode ser resolvida utilizando-se o método da separação de variáveis ou também, como é comum, resolvê-la admitindo-se uma solução do tipo exponencial e substituí-la na equação diferencial. Utilizando-se este último procedimento, seja supor *x(t) = Aest* como sendo uma solução. Portanto, substituindo-se esta solução na equação (7-3) tem-se:

*sAest + aAest = 0*

*sx + ax = 0* (7-4)

Também se pode obter a equação (7-4) substituindo-se o operador diferencial *d/dt* pela variável simbólica, *s*, na equação (7-3).

Resolvendo-se a equação (7-4) para *s* escreve-se:

*(s + a )x = 0*

E, como *x* não deve ser zero, ou seja, supõem-se que o circuito deve apresentar uma resposta, tira-se:

*s = –a*, logo:

*x(t) = Ae–at* (7-5)

onde *A* é uma constante que depende das condições iniciais do circuito e *a*, depende dos parâmetros do circuito. Da equação (7-5), fazendo-se *t = 0* tira-se:

*A = x(0)*.

Logo ela pode ser reescrita como:

*x(t) = x(0)e–at*. (7-6)

OBSERVAÇÃO: Se o instante inicial é um instante qualquer *to ≠ 0* pode-se reescrever a equação (7-6) como:

*x(t) = x(to)e–a(t – to).* (7-7)

Então, se *x(t)* representa a corrente no indutor ou a tensão no capacitor, pode-se traduzir a equação (7-7) como:

*iL(t) = iL(to)e–(R/L)(t – to)* (7-8)

que é a corrente no indutor para *t > to* , ou

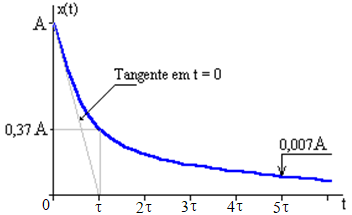
*vC(t) = vC(to)e–(1/RC)(t – to)* (7-9)

que é a tensão no capacitor para *t > to*

Observa-se que tanto *L/R* na equação (7-8) como *RC* na equação (7-9) têm dimensão de tempo, sendo por isso chamada de constante de tempo destes circuitos. Representando-se esta constante de tempo pela letra grega *τ* (tau), pode-se escrever genericamente a resposta natural de um circuito de 1a ordem por:

*x(t) = x(to)e–(t – to)/τ*(7-10)

onde *x(t)* representa a resposta natural do circuito, podendo ser a tensão ou a corrente, no capacitor ou no indutor ou mesmo no resistor. O gráfico da figura 7-3 mostra a variação desta resposta com o tempo em que se supõem o instante inicial *to = 0*.



**Fig. 7-3: Resposta natural de um circuito de 1a ordem**

Observa-se neste gráfico que, para *t = 5τ*, tem-se *x(t) = 0,007A*, ou seja, *x(t)* vale menos de *1%* do valor inicial *A*. Se *x(t)*, por exemplo, representar a tensão no capacitor, considera-se, para efeitos práticos, que o capacitor estará descarregado a partir de *t = 5τ*. Observa-se também que, a reta tangente em *t = 0* passa em *t = τ*.

Exemplo 1: Encontre a expressão para a corrente no capacitor do circuito *RC*, da figura 7-2, e esboce o seu gráfico em função do tempo.

Solução: Supondo-se o instante inicial igual a *0* e *vC(0) = Vo*, então, pela equação (7-10), a tensão no capacitor fica sendo:

*vC(t) = Voe– (t/RC)*.

E como , encontra-se:

O gráfico desta equação é mostrado na figura 7-4.

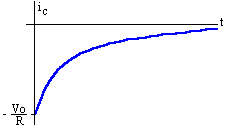


Fig. 7-4: Corrente no capacitor como resposta natural do circuito RC

Exercício: Considerando o circuito *RC* da figura 7-2 encontre a expressão, em função de *t*, para a tensão no capacitor supondo *C = 1 mF* e *R = 2 kΩ* e sendo o instante inicial *to = 2 s* com *vC(to) = 10 V*.

**Resposta:** *vC(t) = 10e*–*(t – 2)/2*.

Exemplo 2: Encontrar a tensão *v(t),* para *t > 0*, no circuito da figura 7-5 supondo que a chave estava na posição *a* por um longo tempo até o instante zero.

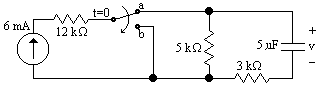


Fig. 7-5: Circuito do exemplo 2

Solução: Com a chave na posição *a*, determina-se a tensão inicial:

*v(0*–*) = v(0+) = 30 V*

Para *t > 0* (chave na posição *b*) o circuito fica reduzido ao circuito da figura 7-6, cuja equação diferencial é:

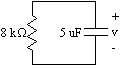


Fig. 7-6

Substituindo-se a solução exponencial *v(t) = Aest* nesta equação diferencial, tem-se:

*sAest + 25Aest = 0*

*s + 25 = 0* ou *s = –25*

Logo:

*v(t) = Ae–25t*

como *v(0) = 30V*, então *A = 30*

Portanto:

*v(t) = 30e–25t*.

Exemplo 3: Encontre a corrente *i(t)* para *t > 0* no circuito da figura 7-7, supondo: *R1 = 3 , R2 = 2 , L1 = 1 H* e *L2 = 4 H.*

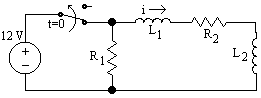


Fig. 7-7: Circuito do exemplo 3

Solução: com a chave supostamente fechada há bastante tempo até o instante zero, determinamos a corrente inicial:

*i(0*–*) = i(0+) = 6A*

Para *t > 0* (chave aberta) o circuito fica reduzido à figura 7-8.



Fig. 7-8

donde se tira:

*Req = R1 + R2 = 5*  e *Leq = L1 + L2 = 5 H* e *τ = Leq/Req = 5/5 = 1 s*

A corrente *i(t)* será, portanto:

*i(t) = 6e–t A, t > 0*.

Exemplo 4: Encontre a expressão para a energia dissipada no resistor de um circuito *RC*, sem excitação, supondo que a tensão em *t = 0* no capacitor é *Vo*.

Solução: no circuito *RC*: como *v(t) = Voe–t/τ, t > 0*, onde *τ = RC*, encontra-se a potência dissipada no resistor:

*,* ondeé a potência inicial.

Portanto, a energia dissipada pelo resistor será:

*wR(t) =* (7-11)

Substituindo-se *po* na equação (7-11) encontra-se:

*wR(t) =*  (7-12)

Para o circuito *RL* pode ser mostrada que a energia dissipada pelo resistor será:

*wR(t) =*  (7-13)

7.4 CIRCUITOS RL E RC COM FONTES DEPENDENTES

A presença de fontes dependente simplesmente afeta a constante de tempo do circuito como será visto no exemplo a seguir.

Exemplo 6: considere o circuito da figura 7-10, onde se supõe *i(0) = Io*

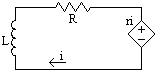


Fig. 7-10: Circuito com fonte dependente

Escrevendo-se a equação para a malha deste circuito, obtém-se a equação diferencial:

Pela equação diferencial do circuito observa-se que a constante de tempo ficou sendo *τ = L/(R + r)*. Portanto a resposta natural *i(t)* será:

*i(t) = i(0)e–t/τ,* para *t > 0,* onde *τ = L/(R + r)*

Exemplo 7: Encontre a corrente *i* no indutor e a tensão *v* no capacitor, para *t > 0*, no circuito da figura 7-11. Suponha-se que o circuito está em estado estacionário em *t = 0*–.

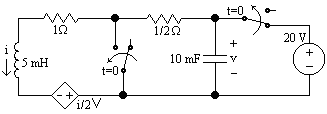


Fig. 7-11: Circuito do exemplo 7

Solução: para *t < 0* encontra-se: *v(0) = 20 V* e *i(0) = 20 A*

Para *t > 0* o circuito resultante fica como mostrado na figura 7-12, constituído de duas malhas separadas, donde se tira as equações diferenciais:

para a malha esquerda e

para a malha direita

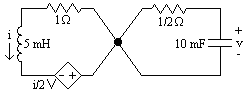


Fig.7-12

Resolvendo-se estas equações diferenciais, encontra-se:

*i(t) = 20e–100t A, t > 0* e *v(t) = 20e–200t V, t > 0*

Exercício: Na figura 7-12 encontre a corrente no indutor para *t > 0* depois de trocar o valor da fonte dependente para *3i V*. Observe-se que a presença de uma fonte controlada pode tornar a constante de tempo negativa.

**Resposta:** *20e400t A*.

7.5 CHAVEAMENTO SEQUENCIAL

Nem sempre as chaves de um circuito são comutadas ao mesmo tempo. Um chaveamento seqüencial é a ação de duas ou mais chaves ativadas em instantes diferentes, às vezes obedecendo à determinada seqüência.

Exemplo 8: No circuito da figura 9-13, encontre a corrente *i*, para *t > 0*, sabendo que a 1a chave é comutada no instante *t = 0* e a 2a chave é comutada no instante *t = 1 ms*. O circuito está em regime permanente em *t = 0*–*.*

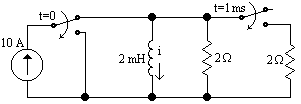


Fig. 7-13: Circuito com chaveamento seqüencial

Solução: para *t < 0* encontra-se a condição inicial: *i(0) = 10 A*

Para *0 < t < 1 ms* (1a chave é comutada) tem-se um circuito *RL* com apenas 1 resistor de *2* , sendo sua constante de tempo: *τ1 = L/R = 2/2 = 1 ms*. Portanto:

*i(t) = 10e–1000t, 0 < t < 1ms*

Para *t > 1 ms* (2a chave é comutada) se tem um circuito *RL* com 2 resistores em paralelo, sendo sua constante de tempo: *τ2 = 2/1 = 2 ms*. Portanto:

t > 1 ms.

7.6 RESPOSTA À EXCITAÇÃO CONSTANTE – RESPOSTA AO DEGRAU

Será analisada agora a resposta completa de um circuito *RL* ou *RC* com uma ou mais excitações constantes. Chamar-se-á de resposta forçada aquela devida somente à excitação e de resposta completa quando inclui também a resposta natural. Quando uma fonte de excitação constante, de valor unitário, é ligada ou desligada de um circuito, a resposta produzida pelo circuito é chamada de *resposta ao degrau unitário*.

**CIRCUITO RC**

Tomar-se-á como base o circuito da figura 7-14.

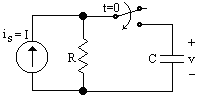


Fig. 7-14: Circuito com excitação constante

Para *t < 0* considera-se que *v(0) = Vo*

Então, para *t > 0*, a equação diferencial do circuito é dada por:

ou

onde:

*τ = RC* e *k =*

**CIRCUITO RL**

Tomar-se-á como referência o circuito da figura 7-15.

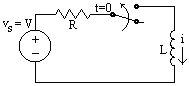


Fig. 7-15

Para *t < 0*, considera-se que *i(0) = Io*

Para *t > 0* a equação diferencial do circuito é dada por:

ou

onde:

*τ =* e *k =*

Assim, seja qual for o circuito, RC ou *RL*, a equação diferencial tem a mesma forma, do tipo:

(7-14)

que é uma equação não-homogênea de coeficientes constantes, cuja solução tem a forma:

*x(t) = Ae–t/τ + kτ*  (7-15)

onde *A* depende das condições iniciais do circuito e *k* depende da excitação. Verifica-se que a constante, *kτ*, é a resposta forçada, pois depende da excitação, enquanto *Ae-t/τ* é a resposta natural. Assim, a resposta completa, *x(t)*, pode ser vista como a soma da resposta natural (solução da equação homogênea), *xN*, com a resposta forçada (solução particular) *xF*, ou seja:

*x(t) = xN + xF*(7-16)

Observe-se que: *x(0) = A + kτ* ou *A = x(0) – kτ* e *x() = kτ*

Então, a solução *x(t)*, dada na equação (7-15), quando a *excitação é constante*, pode ser escrita na forma:

*x(t) =* [*x(0) – x()*] *+ x()* (7-17)

OBSERVAÇÃO: Muitas vezes, *x(∞)* representa a tensão de circuito aberto (*Voc*) no capacitor quando em regime permanente ou a corrente de curto circuito (*Isc*) no indutor quando em regime permanente.

Exemplo 9: Para o circuito *RC* da figura 7-14, encontrar a expressão da tensão no capacitor e esboçá-la em função do tempo.

Solução: como *τ = RC* e *k =*  então, usando a equação (7-15), tem-se:

*v(t) = A + kτ = A + RI*

Usando-se a condição inicial *v(0) = Vo* encontra-se *A = Vo – RI*, logo:

*v(t) = (Vo – RI) + RI, t > 0*.

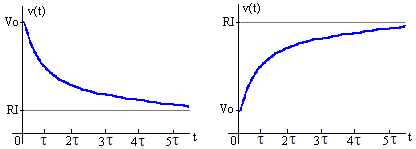
Observe-se que *v(t)* poderia ser encontrado usando a equação (7-17), fazendo-se:

*v(0) = Vo  e v() = RI*

Para o circuito *RL* obtém-se, usando os mesmos procedimentos:

*i(t) = (Io – V/R) +*

O esboço gráfico de *v(t)* é mostrado na figura 7-16(a), supondo *Vo > RI*, e na figura 7-16(b), supondo *Vo < RI*.



(a) (b)

# Fig. 7-16

Exemplo 10: Encontre a tensão no capacitor, para *t > 0*, no circuito da figura 7-17. Em que instante essa tensão passa por zero? Supõe-se que até *t = 0* o circuito está em estado estacionário.

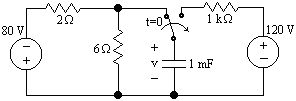


Fig. 7-17

Solução: Para *t < 0* encontra-se: *v(0) = –60 V*

Para *t > 0*, usando-se a equação (7-17), tem-se:

*v(t) =* [*v(0) – v()*] *+ v(),* onde*: v(0) = –60 V, v() = 120 V* e *τ= 1 s,* logo:

*v(t) = 120 – 180e–t V*.

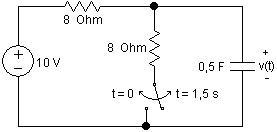
Se em *t = t1 v = 0*, então, da equação de *v(t)* tira-se:

*0 = 120 – 180*, donde se encontra:

*t1 = 0,41 s*.

Exercício: O circuito mostrado na figura 7-18 está em estado estacionário antes de a chave ser fechada no instante *t = 0 s*. A chave permanece fechada por *1,5 s* e em seguida se abre. Determine a tensão no capacitor para *t > 0*.

**Resposta:** *5 + 5 e*–*0,5t V* para *0 < t < 1,5 s* e *10 – 2,64e*–*0,25(t – 1,5) V* para *1,5 < t < ∞*.



**Fig. 7-18**.

Exemplo 11: Encontrar a tensão *v*, para *t > 0*, no capacitor da figura 7-19, que tem uma tensão inicial *v(0) = 10 V*, sem usar a equação (7-12), ou seja, encontrando a resposta natural e a resposta forçada, e em seguida somando as duas.

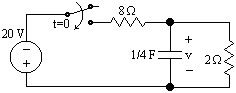


Fig. 7-19: Circuito do exemplo 11

Solução: Após o fechamento da chave, para se encontrar a resposta natural *vN*, anula-se a excitação (substituindo a fonte por um curto circuito). Desta forma o capacitor "enxergará" uma resistência equivalente (resultante do paralelo de *8*  com *2* ) de *1,6* . Portanto, a constante de tempo do circuito será:

*τ = ReqC = (1,6)(1/4) = 0,4 s*, logo, usando-se a equação (7-5), encontra-se:

*vN = Ae–2,5t*

Para se encontrar a resposta forçada faz-se *vF = v()*, já que a excitação é constante. Portanto:

*vF = v() = v2 = – 4 V*

Então, a resposta completa será a soma da resposta natural com a resposta forçada, ou seja:

*v(t) = Ae–2,5t – 4*

A constante *A* pode ser encontrada fazendo *v(0) = 10 V*, donde se tira *A = 14 V*. Então, a resposta completa fica:

*v(t) = 14e–2,5t – 4 V*.

Exemplo 12: Sem usar a equação (7-12), ou seja, encontrando a resposta natural e a resposta forçada e em seguida somando as duas, encontre a corrente *i* mostrada no circuito da figura 7-20, para *t > 0*. Supõe-se regime permanente em *t = 0*–*.*

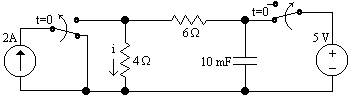


Fig. 7-20: Circuito do exemplo 12

Solução: para *t < 0* tem-se:

*vC(0*–*) = 5 V* e *i(0*–*) = 0,5 A*

Para *t > 0* o circuito fica como mostrado na figura 7-21:

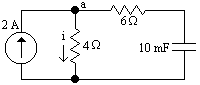


Fig. 7-21

Para o nó *a* da figura 7-21 escreve-se:

*i(0+) + ,* onde se fez*: vC(0+) = vC(0-) = 5 V* e *va = 4i(0+)*

O que permite encontrar *i(0+)* como sendo:

*i(0+) = 1,7 A*

Para a resposta natural usa-se a equação (7-9), fazendo: *τ = ReqC = (10)(0,01) = 0,1s*

Desta forma:

*iN = Ae–10t*

Como a excitação é constante, a resposta forçada será:

*iF = i() = 2 A*.

Portanto, a resposta completa será:

*i(t) = iN + iF = Ae–10t + 2*

A constante *A* pode ser encontrada usando-se a condição inicial de *i*.

Assim: para *i(0+) = 1,7* encontra-se: *A = – 0,3 A*

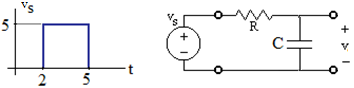
Então a resposta completa fica:

*i(t) = –0,3e–10t + 2 A*.

**RESPOSTA A UM PULSO RETANGULAR**

A comutação de uma fonte constante pode ser expressa em termos da função degrau como visto no capítulo 6, e a resposta a esse chaveamento pode ser chamada de resposta ao degrau, muitas vezes representada por *s(t)* quando o degrau é unitário.

Exemplo 13: Suponha que um pulso de tensão, *vs(t)*, mostrado na figura 7-22(a) seja aplicado a um circuito *RC* conforme mostra a figura 7-22(b) . Esboce a forma de onda da tensão no capacitor. Suponha-se que o capacitor está descarregado para *t < 2 s* e que *R = 1 k* e *C = 1 mF*.



(a) (b)

**Fig. 7-22: (a) Pulso retangular; (b) Circuito RC excitado por um pulso retangular.**

Solução: o pulso de tensão pode ser representado analiticamente por:

*vs(t) = 5*[*u(t – 2) – u(t – 5)*]

Para *t < 2, v(t) = 0*, conforme dado do problema.

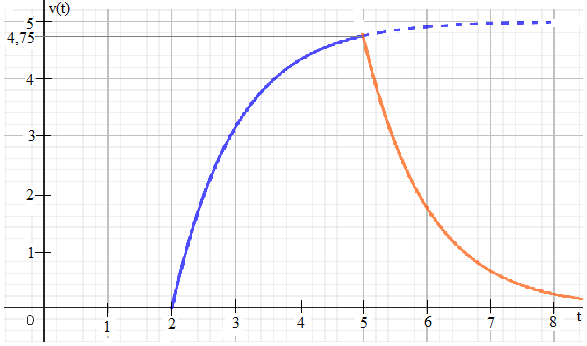
Para *2 < t < 5* a excitação é constante, ou seja, *vs(t) = 5 V*, podendo *v(t)* ser dada pela equação (7-17), ou seja:

*v(t) =* [*v(2) – v()*]*e–(t – 2)/τ + v() =* [*0 – 5e–(t – 2)/1*] *+ 5 = 5 – 5e–(t – 2), 2 < t < 5.*

Para *t > 5* a excitação se torna nula e o circuito responde naturalmente partindo da tensão inicial *v(5)*. Esta tensão é calculada fazendo-se *t = 5 s* na equação anterior, obtendo-se: *v(5) = 4,75 V*. Portanto:

*v(t) = v(5)e–(t – 5)/τ = 4,75e –(t – 5)/1 V, t > 5.*

O gráfico da figura 7-23 mostra um esboço da tensão no capacitor com o tempo.



**Fig. 7-23**.

7.7 RESPOSTA À EXCITAÇÃO NÃO CONSTANTE

Seja uma excitação variante com o tempo, *y(t)*, aplicada a um circuito *RL* ou *RC*, tendo como resposta, *x(t)*. Então, a equação diferencial do circuito será:

(7-18)

onde *a =* ,sendo *τ* a constante de tempo.

Multiplicando-se ambos os membros da equação (7-18) por *eat*, tem-se:

ou (7-19)

Integrando-se ambos os membros da equação (7-19), vem:

*x(t) = Ae–at + e–at yeatdt*  (7-20)

Portanto, observando-se a equação (7-20), novamente a resposta completa será a soma de uma resposta natural, *xN* *= Ae–at*, com uma resposta forçada que terá a mesma forma da excitação, *xF = e–at yeatdt*.

Exemplo 14: encontre a corrente *i* no circuito da figura 7-24 para *v­s = 10e–2tu(t) V*.

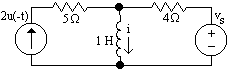


Fig. 7-24

Solução: para *t < 0* se tem: *i(0) = 2 A*

Para *t > 0* este circuito reduz-se ao da figura 7-25:



Fig. 7-25

A equação diferencial deste circuito é:

*+ 4i = 10e–2t*

Como a excitação é exponencial deve-se esperar que a resposta forçada seja também uma exponencial da forma: *iF = Be–2t*. Assim, substituindo-se esta solução particular na equação diferencial do circuito, tem-se:

*(Be–2t) + 4(Be–2t) = 10e–2t* , donde tira-se: *B = 5*. Logo, a resposta forçada será:

*iF = 5e–2t*

A resposta natural é dada por: *iN = Ae–t/τ = Ae–4t* . Então a resposta completa tem a forma:

*i(t) = iN + iF = Ae–4t + 5e–2t*

A constante *A*, é encontrada utilizando-se a condição inicial *i(0) = 2 A*, donde se tira *A = –3 A*.

Assim, a resposta completa será:

*i(t) =* –*3e–4t + 5e–2t A*.

OBSRVAÇÃO: Se a constante de tempo da excitação coincidir com a constante de tempo do circuito, deve-se usar para resposta forçada a equação: *xF = Bte–t/τ*. Verifique este caso fazendo no exemplo anterior, *vs = 10e–4t*.

Exemplo 15: encontre a tensão *v* no circuito da figura 7-26, para *t > 0*, quando a excitação é: *is = (10sen2t)u(t) A*. Considere *v(0) = 0*.

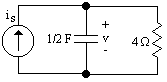


Fig. 7-26

Solução: a equação diferencial do circuito é dada por:

*+ 0,5v = 20sen(2t)*

Como a excitação é senoidal, deve-se esperar que a resposta forçada (solução particular) seja também senoidal. A solução trivial *vF = Asen2t*, resulta em dois valores distintos para a constante *A*. Então tenta-se uma solução mais geral do tipo:

*vF = Asen(2t) + Bcos(2t)*

Substituindo-se esta solução na equação diferencial do circuito, tem-se:

*2Acos(2t) – 2Bsen(2t) + Asen(2t) + Bcos(2t) = 20sen(2t)*

donde se tira: *A =* e *B = –*

A resposta forçada será, portanto:

*vF = sen(2t) – cos(2t)*

A resposta natural é: *vN = k = k*

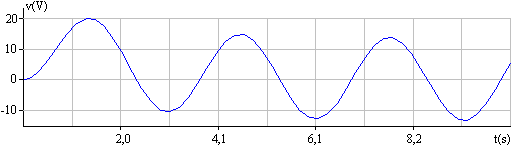
E a resposta completa: *v(t) = k + sen(2t) – cos(2t)*

A constante *k* é encontrada fazendo v(0) = 0, donde se tira *k =* .

Portanto, a resposta completa será:

*v(t) = + sen2t – cos2t V*.

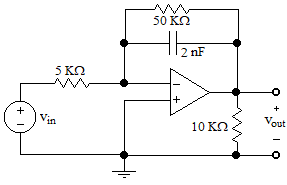
O gráfico da figura 7-27 mostra o esboço de *v* em função de *t*



**Fig. 7-27**.

Analisando-se este gráfico, bem como a equação de *v(t)*, verifica-se que o termo exponencial tende a desaparecer quando *t* tende para o infinito e assim a resposta de regime permanente tende a ser uma senoide pura de frequência angular igual a *2 rd/s*. O termo que tende a desaparecer com o tempo é chamado de *transitório* ou *transiente* e o restante é chamado de *regime permanente*.

Exercício: Encontre a equação diferencial para *vout* em função de *vin* no circuito mostrado na figura 7-28, onde o amplificador operacional é considerado ideal.



**Fig. 7-28**

7.8 ESTABILIDADE DE CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM

Foi visto que a resposta natural de um circuito de primeira ordem é

*xN(t) = A*

e que a resposta completa é a soma das respostas natural e forçada, ou seja:

*x(t) = xN(t) + xF(t)*

Quando a constante de tempo é positiva (*τ > 0*), a resposta natural desaparece à medida que *t → ∞*, deixando apenas a resposta forçada. Neste caso o circuito é dito *estável*. Quando a constante de tempo é negativa (*τ < 0*), a resposta natural cresce sem limitação à medida que *t → ∞* e a resposta forçada se torna desprezível comparada com a resposta natural. Neste caso, o circuito é dito *instável*.

Na prática, a resposta natural de um circuito instável não é ilimitada. Esta resposta irá crescer até que alguma coisa aconteça como, por exemplo, a saturação de um amplificador operacional ou de uma fonte dependente ou talvez a queima de um elemento do circuito.

Para se projetar circuitos de primeira ordem estáveis, deve-se lembrar que a constante de tempo *τ = RthC* ou *τ = L/Rth* deve ser positiva. Isto implica que *Rth > 0*. Esta condição será sempre satisfeita quando a parte do circuito conectada ao capacitor ou ao indutor for composta apenas de resistores e fontes independentes. Tais circuitos são garantidamente estáveis. Ao contrário, um circuito de primeira ordem que contenha amplificadores operacionais ou fontes dependentes pode ser instável. No problema 27 no final deste capítulo você terá a oportunidade de calcular a resposta de um circuito instável.

7.9 OPERADORES DIFERENCIAIS E SOLUÇÃO NO MATLAB

Um operador é um símbolo que representa uma operação matemática. Pode-se definir um *operador diferencial s* tal que:

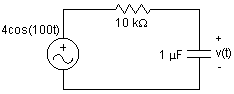
*sx =*  e *s2x =*

A utilidade do operador diferencial *s* é que ele pode ser tratado como uma grandeza algébrica. Isto permite a substituição das equações diferenciais por equações algébricas que são mais fáceis de serem manipuladas. O emprego do operador *s* é particularmente atrativo quando equações diferenciais de ordem elevada estão envolvidas. Então se usa o operador de tal modo que:

*snx =* para *n > 0*.

Considera-se que *n = 0* representa a não existência de derivação, ou seja, *s0 = 1*.

No MATLAB os operadores diferenciais são usados para descrever a equação diferencial. Como exemplo, considere o circuito mostrado na figura 7-29.



**Fig. 7-29**.

Para representar este circuito por uma equação diferencial, aplica-se a lei de Kirchhoff para tensões para se obter:

*0,01dv/dt + v = 4cos(100t)*. (7-21)

No MATLAB, o operador diferencial é representado por *D* em lugar de *s*. Então se substitui *d/dt* na equação (7-21) por *D* para se obter:

*0,01Dv + v = 4cos(100t)*.

Para que o MATLAB resolva a equação diferencial usando-se a condição inicial *v(0) = – 8 V* e em seguida represente graficamente o resultado utilizam-se os seguintes comandos:

*v = dsolve*(*‘0.01\*Dv + v = 4\*cos*(*100\*t*)*’,’v*(*0*) *= – 8’*)

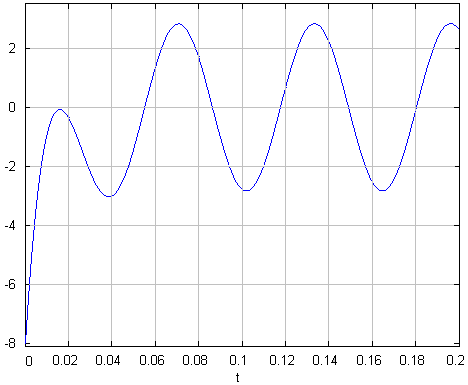
*ezplot*(*v,*[*0, 0.2*])

A função *dsolve* determina a solução simbólica de equações diferenciais ordinárias.

MATLAB responde fornecendo a solução completa:

*v = 2.\*cos*(*100\*t*) *+ 2.\*sen*(*100\*t*) *– 10.\*exp*(*–100.\*t*)

e representa graficamente *v*(*t*) versus *t*, como mostrado na figura 7-30.



**Fig. 7-30: Tensão no capacitor do circuito da figura 7-29**

7.10 APLICAÇÕES

**CIRCUITO DIFERENCIADOR SIMPLES**

Será visto aqui, como um simples circuito *RC* pode funcionar como um diferenciador, quando montado conforme a figura 7-31.

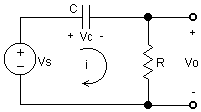


Fig. 7-31: Diferenciador simples

Escrevendo-se a equação da malha do circuito tem-se:

*vC(t) + vo(t) = vs(t)*





onde fez-se *i(t) =*  e supomos *vc(0) = 0*

Agora, derivando ambos os membros dessa equação em relação ao tempo tem-se:

*vo(t) + =*

donde se tira *vo(t)* como sendo:

*vo(t) =*

Assim, supondo-se que *vs >> vo*, esta equação pode ser aproximada por:

*vo(t) RC*  (7-22)

A condição *vs >> vo* é satisfeita quando quase toda a tensão aparece no capacitor. Este será o caso se *C* e *R* tiverem valores pequenos.

**DIFERENCIADOR COM AMPLIFICADOR OPERACIONAL**

O circuito da figura 7-32 pode ser chamado de um circuito diferenciador-inversor. Em outras palavras, a tensão de saída *vo* é dada pela derivada da tensão de entrada *vs*, invertida.

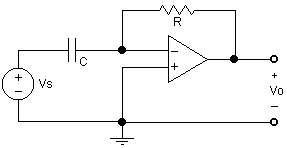


Fig. 7-32: Circuito diferenciador com amplificador operacional

Solução:Nó inversor*: .*

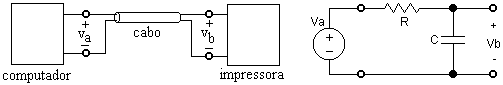
Como *e1 = e2 = 0,* então*:*

*.* Logo*: vo = – RC*

**TRANSMISSÃO DE PULSOS RETANGULARES VIA CABO**

É muito comum a transmissão de sinais elétricos na forma de pulsos entre dois equipamentos conectados por um cabo coaxial ou mesmo por um par de fios trançados. Por exemplo, essa situação ocorre quando uma impressora é conectada a um computador como esboçada na figura 7-33(a), que pode ser modelada pelo circuito da figura 7-33(b), onde o cabo foi substituído por um circuito *RC*. Os valores de *R* e *C* dependem do tipo de cabo e de seu comprimento. Por exemplo, certo tipo de cabo coaxial tem uma resistência distribuída *r = 0,54 /m* e capacitância distribuída *c = 88 pF/m*.

Suponha que o computador envie para a impressora bits *1* e *0* na forma de pulsos retangulares de tensão. Por exemplo, usando a lógica TTL, os valores destes pulsos poderiam ser: *vaH = 2,4 V* para o bit *1* e *vaL = 0,4 V* para o bit *0*. Já o receptor usa valores diferentes para a identificação desses bits como, por exemplo, *vbH = 2 V* para o bit *1* e *vbL = 0,8 V* para o bit *0*. (Isso é feito para aumentar a imunidade contra ruído). O receptor interpretará sua entrada *vb* como sendo lógica *1* se *vb > vbH* e lógica *0* se *vb < vbL*.



(a) (b)

# Fig. 7-33: Comunicação entre computador e impressora via cabo

A figura 7-34 mostra o que acontece quando ocorre uma mudança da lógica *0* para a lógica *1*.

Antes do instante *to* tem-se: *va = vaL* e *vb < vbL* para *t to*

ou seja, um bit *0* está sendo enviado para o receptor. Uma transição para *va = vaH* ocorre no instante *to*, que corresponde ao envio de um bit *1*. Na entrada do receptor essa transição ocorre mais lentamente (devido à presença do circuito *RC*) segundo a curva de *vb*. Então o receptor só interpretará a chegada de um bit *1* após o instante *t1* quando:

*vb > vbH* para *t t1*

O tempo que o receptor leva para reconhecer uma transição da lógica *0* para a lógica *1*, dado por:

*t = t1 – to*

é chamado de retardo. Este retardo é importante porque ele limita a velocidade de transmissão entre transmissor e receptor. Assim, a taxa na qual os bits *0* e *1* são enviados é inversamente proporcional ao retardo *t*.

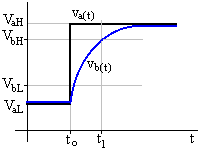


Fig 7-34

Para exemplificar numericamente, seja calcular o *comprimento máximo* do cabo para que o retardo *t* não ultrapasse *2 ns*, ou seja, para que:

*vb > vbH = 2 V* no tempo *t = to + t*

Tem-se, pois os seguintes dados:

*τ = R.C = (rℓ)(cℓ) = rcℓ2 = 0,54(88)(10–12)ℓ2 = 47,52(10–12)ℓ2*

onde *τ* é a constante de tempo do circuito e *ℓ* é o comprimento do cabo em metros. Tem-se também:

*vb(0) = vaL = 0,4 V* e *vb() = vaH = 2,4 V*

Usando a equação (7-12), a tensão *vb(t)* pode ser expressa por:

*vb(t) =* [*vb(0) – vb()*]*e–(t – to)/τ + vb()*

No instante *t1 = to + t* a tensão *vb* será igual a *vbH*, então:

*vbH =* [*vaL – vaH*]*e–t/τ + vaH*

Tirando o valor de *t* obtém-se:

*t = –τln*[*(vbH – vaH)/(vaL – vaH)*]

ou

*2(10–9) = – 47,52(10–12)ℓ2ln*[*(2 – 2,4)/(0,4 – 2,4)*]

donde se tira:

*ℓ = 5,11 m*.

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



RESPOSTA NATURAL DE CIRCUITOS *RL* E *RC*:

,

Onde: *τ = RC* ou *τ = L/R*

RESPOSTA A UMA EXCITAÇÃO CONSTANTE:

*x*(*t*) *=* [*x*(*0*) *– x*()] *+ x*()

Onde: *x(t)* é a tensão ou corrente no capacitor ou indutor e *x*() é a resposta de regime permanente

**PROBLEMÁTICA**

1) Mostre que a reta tangente em *t = 0* para a curva exponencial mostrada na figura 7-3, de um circuito de 1a ordem, corta o eixo dos tempos em *t = τ*.

2) Mostre que o produto *RC* e a razão *L/R*, têm dimensão de tempo.

3) Encontre a corrente *i(t)* para *t > 0* no circuito da figura P7-1, supondo que a chave tem estado na posição *a* por um longo tempo.

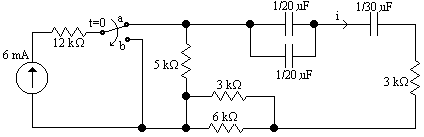


Fig. P7-1

4) Encontre a tensão *v* no capacitor do circuito da figura P7-2, para *t > 0*. Assuma que a chave estava na posição *a* por um longo tempo.

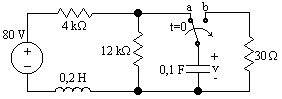


Fig. P7-2

5) Determine *i(t)* para *t > 0* no circuito da figura P7-3. Assume-se estado estacionário para *t < 0*.

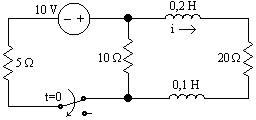


Fig. P7-3

6) Para o circuito mostrado na figura P7-4, encontre *i(t)* quando *v(0*–*) = 3V* e *C = 4mF*.

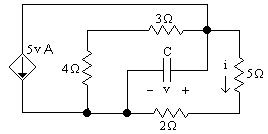


Fig. P7-4

7) Determine *i* no indutor do circuito da figura P7-5, para *t > 2*. Supõe-se que o circuito esta em regime permanente em *t = 2*.

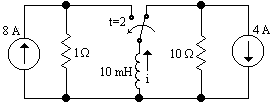


Fig. P7-5

8) A chave do circuito da figura P7-6 foi fechada na posição *1* no instante zero e aí ficou durante *1s*, sendo depois passada para a posição *2*, onde ficou durante *2 s*, antes de passar para a posição *3*. Esboçar a forma de onda de *v(t)*. Suponha *v(0) = 0*.

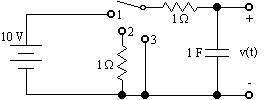


Fig. P7-6

9) No circuito da figura P7-7, a chave é movida de *a* para *b* em *t = 0*, após ter permanecido por muito tempo em *a*. Supondo que *v2(0) = 0*, encontre: *vR(t), i(t), v1(t)* e *v2(t),* para *t > 0*.

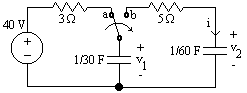


Fig. P7-7

10) Calcular a corrente *i(t)* no circuito da figura P7-8, para *t > 0*, sabendo que *i(0) = 0* e *vs = (10sent)u(t)*.

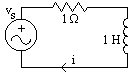


Fig. P7-8

11) O circuito da figura P7-9 é excitado pela forma de onda de tensão *vs* mostrada ao lado do circuito. Esboçar a forma de onda de *vC* para t > 0. Suponha *vC(0) = 0*.

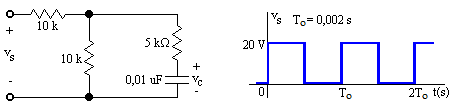


Fig. P7-9

12) Encontre *i(t)* para *t > 0* no circuito da figura P7-11, supondo regime permanente em *t = 0*–*.*

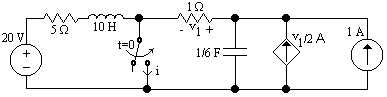


Fig. P7-11

13) Encontre a tensão, *vc(t)*, para *t > 0*, no circuito mostrado na figura P7-12, quando *v1 = 8e*–*5tu(t) V*. Suponha estado estacionário em *t = 0*–.

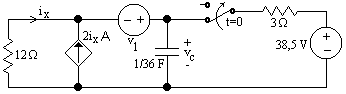
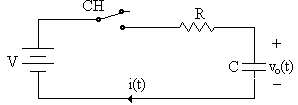


Fig. P7-12

14) Certo transformador monofásico, operando em vazio, é modelado pela seguinte equação: *v(t) = Ri(t) + Ldi/dt*. As grandezas *v(t), i(t), R* e *L* são respectivamente: a tensão, a corrente, a resistência e a indutância do primário desse transformador. No instante *t = 0*, a corrente é nula e o transformador é alimentado com uma tensão, em Volts, dada pela seguinte expressão: *v(t) = 100cos(377t)*. Determine a corrente *i(t)* no transformador, para *R = 1 e L = 10 mH*.

15) Considere o circuito *RC*, apresentado na figura P7-13, em que o capacitor está inicialmente descarregado.



**Fig. P7-13**

1. Escreva a expressão, em função de *V, R* e *C*, da corrente na malha em *t = 0*, quando a chave *CH* for fechada. Justifique sua resposta.
2. Para a chave *CH* fechada em *t = 0*, escreva a expressão, em função de *V, R* e *C*, da tensão nos terminais do capacitor em regime permanente.
3. Determine a expressão analítica de *i(t),* para *t > 0*, em função de *V, R* e *C*, sabendo que a chave *CH* foi fechada em *t = 0.*
4. O gráfico da figura P7-14 apresenta a tensão nos terminais do capacitor, devido ao fechamento da chave no instante *t = 0,1 s* (curva exponencial). O capacitor é de *1uF*, e a fonte de tensão, de *5 volts*. Observando a curva exponencial que corresponde ao sinal de saída *vo(t)*, medido nos terminais do capacitor, estime a ordem de grandeza do resistor, e justifique sua resposta.

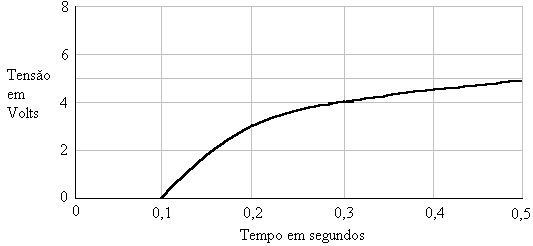


Fig P7-14

16) Calcule o intervalo de tempo necessário para que o capacitor do circuito da figura P7-15, se carregue com uma tensão de *8 V*, após fechada a chave. O capacitor está inicialmente descarregado.

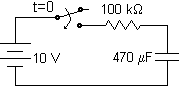


Fig. P7-15

17) Calcule o valor da corrente *i* no circuito da figura P7-16, após decorridos *1 s* do fechamento da chave. O capacitor está inicialmente descarregado.

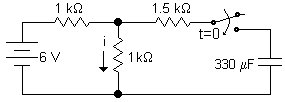


Fig. P7-16

18) Mostre que o circuito mostrado na figura P7-17 pode ser chamado de um circuito integrador-inversor. Em outras palavras, mostre que a tensão de saída *vo* é dada por:



onde *to* representa o instante de tempo em que começa a integração e *vo(to)* é o valor da tensão de saída nesse mesmo instante.

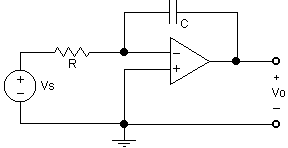


Fig. P7-17

19) Mostre que o circuito da figura P7-18 pode funcionar como um integrador simples. Em outras palavras, mostre que a tensão de saída *vo* é dada aproximadamente por:



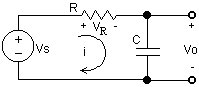


Fig. P7-18

20) No instante em que a chave faz contato com o terminal *a* no circuito da figura P7-19, a tensão no capacitor é *5 V*. A chave permanece no terminal *a* por *9 ms* e depois é deslocada instantaneamente para o terminal *b*. Quantos milissegundos após a chave fazer contato com o terminal *a* o amplificador operacional satura?

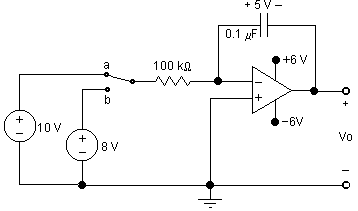
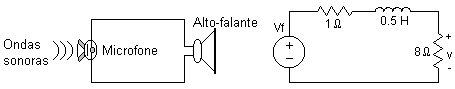


Fig. P7-19

21) Muitas pessoas usam um megafone elétrico para amplificação da voz quando falam para uma multidão. Um modelo de um microfone conjugado a um alto-falante é mostrado na figura P7-21(a). E o modelo de circuito é mostrado na figura P7-21(b). Encontre a tensão sobre o alto-falante, *v(t),* para *vf(t) = 10sen(100t)u(t)*, o que pode representar uma pessoa gritando ou cantando um único tom.



(a) (b)

# Fig. P7-21

22) A tensão no capacitor da figura P7-22 é *25 V* no momento em que a chave é fechada. Se o capacitor é destruído no momento em que a tensão entre seus terminais atinge ou excede *50 kV*, quanto tempo após a chave ser fechada, o capacitor é destruído?

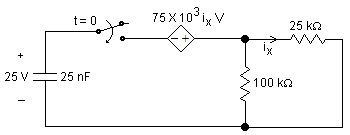


Fig. P7-22

23) A chave do circuito da figura P7-23 ficou fechada por um longo tempo antes de ser aberta em *t = 0*. Determine: (a) *iL(t)* para *t > 0. (b) io(t)* para *t > 0. (c) vo(t)* para *t > 0*. (d) A porcentagem de energia total armazenada no indutor que é dissipada pelo resistor de *10 Ω*.

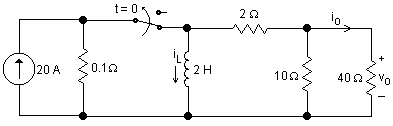


Fig. P7-23

24) Quando a chave do circuito da figura P7-24 é fechada, a tensão no capacitor é de *10 V*. Determine a expressão de *vo(t)* para *t >* 0. Suponha que o capacitor entre em curto circuito quando a tensão em seus terminais chega a *150 V*. Quanto tempo se passa até o capacitor entrar em curto circuito?

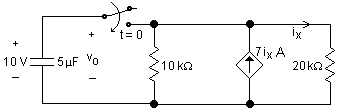
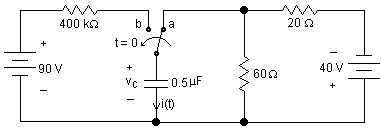


Fig. P7-24

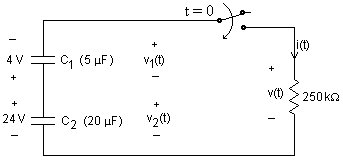
25) A chave do circuito da figura P7-25 foi mantida por um longo tempo na posição *a*. Em *t = 0*, a chave é colocada na posição *b*. Determine: (a) A expressão de *vC(t)* para *t > 0*. (b) A expressão de *i(t)* para *t > 0*.

(c) Quanto tempo depois que a chave é colocada na posição *b* a tensão no capacitor atinge o valor zero?



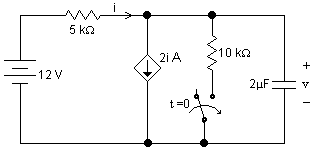
**Fig. P7-25**

26) No circuito mostrado na figura P7-26, as tensões iniciais nos capacitores *C1* e *C*2 foram estabelecidas por fontes mais tarde retiradas do circuito. A chave é fechada em *t = 0*. (a) Determine *v1, v2* e *v* para *t > 0 e i(t)* para *t > 0+.* (b) Calcule a energia inicialmente armazenada nos capacitores. (c) Determine a energia armazenada nos capacitores quando *t → ∞*. (d) Mostre que a energia total dissipada no resistor é igual à diferença entre os resultados obtidos em (b) e (c).



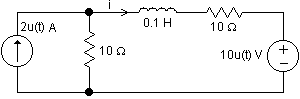
**Fig. P7-26**

27) Encontre a tensão no capacitor, *v(t)*, para *t > 0*, no circuito mostrado na figura P7-27, e verifique que este circuito é instável.



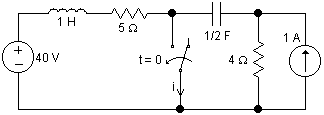
**Fig. P7-27**.

28) Usando o principio da superposição encontre a corrente *i(t)*, para *t > 0*, no circuito da figura P7-28 supondo que *i(0) = 3,5 A*.



**Fig. P7-28**.

29) Usando superposição encontre a corrente *i(t)*, para *t > 0*, no circuito da figura P7-29.



**Fig. P7-29**.

30) Para o circuito da figura P7-30, encontre a corrente *i* e a energia dissipada no resistor de *10* , para *t > 0*. Em que instante, *90%* da energia armazenada no indutor será dissipada pelo resistor?

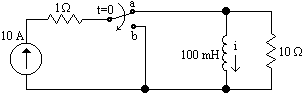


Fig. P7-30